

# Die weiche Röntgenstrahlung der ungestörten Sonnenkorona

Von GERHARD ELWERT

Aus dem Astronomischen Institut der Universität Tübingen

(Z. Naturforschg. **9a**, 637—653 [1954]; eingegangen am 3. September 1953)

Mit der in einer früheren Arbeit abgeleiteten Ionisationsformel der Sonnenkorona werden für die Elemente großer kosmischer Häufigkeit Teilchendichten der Ionen in den in Betracht kommenden Ionisationsstufen ermittelt. Die bei den Photorekombinationen und bei frei-frei-Übergängen entstehende Ausstrahlung führt zu einem kontinuierlichen Emissionsspektrum, das in der Wellenlängenskala ein Maximum bei 30 bis 50 Å hat.

Größere Intensität liefert die Linienemission, deren Maximum bei etwas längeren Wellen liegt. Sie wird für die wesentlichen Übergänge diskutiert. Im Vergleich zu den Rekombinationen in höhere Schalen sind Elektronenstöße der wirksamere Anregungsmechanismus. Für die Berechnung der Wirkungsquerschnitte wird die Bornsche Stoßtheorie verwendet. Unter Berücksichtigung der Selbstabsorption werden Spektren der Strahlung der ungestörten Korona für verschiedene Temperaturen angegeben. Mit der berechneten Eigenstrahlung der Korona wird die Gültigkeit der verwendeten Ionisationsformel kontrolliert.

Auf die Bedeutung der Röntgenstrahlung für die Bildung der normalen ionosphärischen E-Schicht wird hingewiesen.

Die Ausstrahlung der Sonnenkorona im Wellenlängengebiet weicher Röntgenstrahlen ist eine Folge der außerordentlich hohen Koronatemperatur. Auf diese führen verschiedene Beobachtungen, nämlich der geringe Dichteabfall der Korona, ihre Strahlung im Gebiet der Radiowellen, die Breite der Emissionslinien der Korona, insbesondere aber die Tatsache, daß die Koronalinien durch Übergänge hochionisierter Atome entstehen<sup>1</sup>. Mit Hilfe der Ionisationsformel der Korona läßt sich aus dem Intensitätsverhältnis zweier Koronalinien die Temperatur ermitteln. Da die mittlere Elektronendichte der Korona bekannt ist und für ihre Zusammensetzung nach den Ergebnissen der quantitativen Spektralanalyse die kosmische Häufigkeit der Elemente verwendet werden kann, ist es weiter möglich, mit Hilfe der Ionisationsformel auf die Absolutwerte der Ionenzahlen in den einzelnen Ionisationsstufen zu schließen.

Bei den Rekombinationen der freien Elektronen mit den hochionisierten Atomen der Korona werden Lichtquanten emittiert. Dadurch entsteht ein Kantenspektrum im Wellenlängengebiet weicher Röntgenstrahlen. Außerdem können Elektronen bei ihrer Ablenkung im Feld der Atomkerne in diesem Frequenzbereich strahlen. Endlich werden die Ionen durch Elektronenstöße zur Linienemission ange-

regt. Die gesamte durch diese Prozesse bedingte Ausstrahlung im Gebiet weicher Röntgenstrahlen soll in der vorliegenden Arbeit berechnet werden. Dabei werden eine verschärfte Ionisationsformel und wellenmechanisch gerechnete Wirkungsquerschnitte für Stoßanregung zugrunde gelegt.

Diese sonnenphysikalischen Untersuchungen interessieren im Zusammenhang mit dem terrestrischen Phänomen der Entstehung der Ionosphäre.

## I. Ionisationszustand der Sonnenkorona

### 1. Ionisationsformel und Temperatur der Korona

Die Besonderheiten des Ionisationsgleichgewichts der Korona sind schon mehrfach hervorgehoben worden<sup>2,3,4</sup>. Im stationären Zustand ist die Zahl der Stoßionisationen gleich der Zahl der Photorekombinationen. Auf Grund einer genaueren Untersuchung der Wirkungsquerschnitte dieser Prozesse wurde in einer früheren Arbeit des Verfassers<sup>5</sup> die Formel abgeleitet

$$\frac{n_i}{n_{i+1}} = \frac{16\alpha^3}{3^{1/3}} \frac{f_1}{f_2} \frac{g_{n_0}}{\zeta_{n_0}} \left( \frac{\chi_{n_0}}{\chi_{i+1}} \right)^2 \frac{\chi_{n_0}}{kT} e^{\chi_{n_0}/kT}. \quad (1)$$

Hierin bedeutet  $n_i$  bzw.  $n_{i+1}$  die Zahl der Atome im  $i$ -ten bzw.  $(i+1)$ -ten Ionisationszustand und  $\chi_{n_0}$  die entsprechende Ionisationsenergie für die  $n_0$ -te

<sup>1</sup> H. Siedentopf, Die Sonnenkorona, Erg. exakt. Naturwiss. XXIII, Springer Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1950. Dieser Bericht gibt eine zusammenfassende Darstellung der gesamten Koronaforschung.

<sup>2</sup> L. Biermann, Naturwiss. **34**, 87 [1947].

<sup>3</sup> S. Miyamoto, Publ. Astr. Soc. Pacif. **I**, 1950.

<sup>4</sup> R. v. d. R. Woolley u. C. Allen, Monthly Not. Roy. Astr. Soc. **108**, 292 [1948].

<sup>5</sup> G. Elwert, Z. Naturforschg. **7a**, 432 [1952], im folgenden als A zitiert.



Schale; ferner ist  $n_0$  die Hauptquantenzahl der höchsten Schale, die im Grundzustand des niederen Ionisationsgrades noch Elektronen enthält,  $\chi_H$  die Ionisationsenergie des Wasserstoffs,  $\zeta_{n_0}$  die Zahl der Elektronen in der  $n_0$ -ten Schale. Weiter bedeutet

$$g = \frac{\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n} G_1(\chi_n/kT)}{\frac{1}{n_0} G_1\left(\frac{\chi_{n_0}}{kT}\right)} \quad (2)$$

mit  $G_1(x) = x e^x \text{Ei}(x)$ ,  $\text{Ei}(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$

einen von  $\chi_{n_0}/kT$  und  $n_0$  schwach abhängigen Faktor, der die Rekombinationen in die höheren Schalen berücksichtigt und in A tabuliert ist,  $\alpha$  die Sommerfeldsche Feinstruktur-Konstante und  $f_2/f_1$  einen Unsicherheitsfaktor, für den nach A der Wert  $5/4$  der wahrscheinlichste ist.

In der genannten Arbeit wurde gezeigt, daß sich aus der obigen Ionisationsformel bei gleicher Intensität der grünen und roten Koronalinie eine Temperatur von etwa  $7 \cdot 10^5$  Grad ergibt. Sie ist in guter Übereinstimmung mit der von Reule<sup>6</sup> aus Messungen der Koronastrahlung im Radiogebiet ermittelten Temperatur der inneren Korona. Um die Wirkung von Temperaturvariationen zu erfassen, werden in der vorliegenden Untersuchung außer dieser Temperatur auch noch  $6 \cdot 10^5$  Grad und  $10^6$  Grad betrachtet.

## 2. Ionisationsenergien hochionisierter Atome

Zur Anwendung der Ionisationsformel benötigt man die Ionisationsenergien bei sukzessiver Abtrennung von Elektronen. Diese wurden für fast alle Elemente in sämtlichen Ionisationsstufen von Lisitzin<sup>7</sup> berechnet. Die erhaltenen Werte sind im astrophysikalisch interessierenden Bereich für isoelektronische Reihen in Abb. 1 dargestellt. In ihr ist auf der Abszisse wie beim Moseley-Diagramm die Wurzel der in eV angegebenen Ionisierungsspannung, auf der Ordinate die Kernladung  $Z$  aufgetragen. Bei festgehaltener Kernladung werden die Ionisierungsspannungen mit zunehmender Elektronenzahl infolge der Abschirmung kleiner. Besonders starke Abnahme tritt außerdem dann auf, wenn das nächste Elektron in eine höhere Schale aufge-

nommen wird. Deshalb liegen die Kurven für die 1- und 2-Elektronensysteme durch eine breite Lücke getrennt von den Kurven für die 3- bis 10-Elektronensysteme und diese wiederum von den Kurven für die Ionen mit noch mehr Elektronen.

## 3. Besetzung der Ionisationszustände

Mit Hilfe der Abb. 1 erhält man nun rasch einen Überblick über die Ionisationsgrade der verschiedenen Elemente. Da in der Korona Fe X und Fe XIV vorkommen, enthält Fe nur noch wenige Elektronen in der M-Schale. Die entsprechende Ionisationsenergie beträgt nach Abb. 1 etwa 350 eV. Es hat sich infolgedessen bei allen Atomen ein Gleichgewichtszustand ausgebildet, bei dem in erster Näherung alle die Elektronen abgespalten sind, deren Ablöseenergie unter 350 eV liegt. Also haben Si, Al und Mg nur noch einige Elektronen in der L-Schale, bei Ne, O, N und C ist die L-Schale frei; He und H schließlich sind vollständig ionisiert.

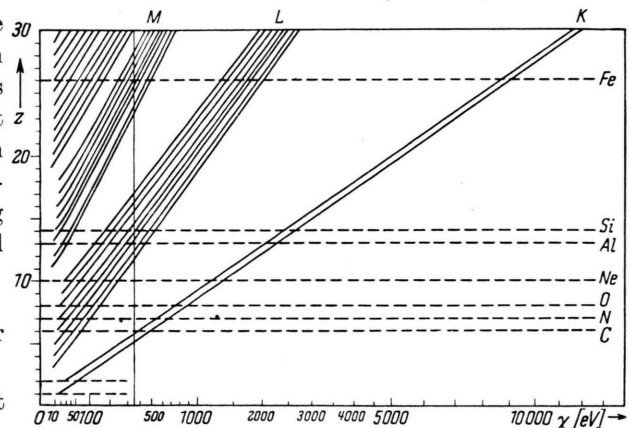


Abb. 1. Ionisationsenergien isoelektronischer Reihen. Abszisse: Ionisationsenergie  $\chi$  in eV. Ordinate: Kernladung  $Z$ .

Tatsächlich sind aber auch noch andere als die genannten Ionisationsgrade vertreten, jedoch mit geringerer Häufigkeit. Zu ihrer Berechnung dient nun die Ionisationsformel (1).

Mit ihr wurden die Häufigkeitsverhältnisse  $n_{i+1}/n_i$  von Ionen benachbarten Ionisationsgrades für die interessierenden Elemente berechnet. Um Absolutwerte für die Zahl der Ionen zu bekommen, benötigt man die relative Häufigkeit der einzelnen Elemente. Diese wurde von Unsöld<sup>8</sup> aus der In-

<sup>6</sup> A. Reule, Z. Naturforschg. **7a**, 234 [1952].

<sup>7</sup> E. Lisitzin, Comment. Phys. Math., Helsingf. X, 7 [1940].

<sup>8</sup> A. Unsöld, Z. Astrophys. **24**, 306 [1948].

tensität der in der Photosphäre entstehenden Fraunhofer-Linien berechnet. Die Teilchendichte der Elemente  $n_z$  wird zweckmäßigerweise auf die Elektronendichte  $n_e$  bezogen. Sie ist infolge der überragenden Häufigkeit von H und He durch diese beiden Elemente bestimmt, und zwar ergibt sich ein Verhältnis der Protonenzahl zur Elektronenzahl wie 3:4. Mit diesem Wert folgen sofort die Verhältnisse  $n_z/n_e$ . Aus der Ionisationsformel sind andererseits die Quotienten  $n_i/\sum n_i = n_i/n_z$  zu ermitteln, so daß schließlich die Zahl der Ionen jeder Ionisationsstufe auf die Zahl der Elektronen bezogen werden kann. Die erhaltenen Werte sind aus Tab. 1 zu entnehmen.

$n_z/n_e$	$\chi$ [eV]	$n_i/n_e$		
		$6 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^5$	$10^6 \cdot \text{Grad}$
2 He $0,12$	I 24,5	$10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-6}$	
	II 54,2			$5 \cdot 10^{-6}$
	III	0,12	0,12	0,12
6 C $3 \cdot 10^{-4}$	IV	$3 \cdot 10^{-7}$	$10^{-7}$	
	V 64	$3 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-5}$
	VI 390	$6 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
7 N $7 \cdot 10^{-4}$	V	$2 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-7}$
	VI 97	$7 \cdot 10^{-1}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$
	VII 549	$10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-5}$
8 O $8 \cdot 10^{-4}$	VI	$4 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-6}$
	VII 137	$8 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$
	VIII 736	$10^{-5}$	$10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-6}$
10 Ne $8 \cdot 10^{-4}$	VII	$6 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-8}$
	VIII 207	$4 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-5}$
	IX 238	$4 \cdot 10^{-1}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$
12 Mg $4 \cdot 10^{-5}$	XI 1190			
	VIII 269	$2 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-6}$	
	IX 326	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-6}$
14 Si $4 \cdot 10^{-5}$	X 365	$4 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$
	VII 245	$3 \cdot 10^{-6}$	$10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-7}$
	VIII 303	$2 \cdot 10^{-5}$	$10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-6}$
15 S $1,2 \cdot 10^{-5}$	IX 358	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-6}$
	X 407	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$
	XI 476		$10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$
26 Fe $5 \cdot 10^{-5}$	XII 476			$4 \cdot 10^{-6}$
	VII 286	$3 \cdot 10^{-6}$	$10^{-6}$	
	VIII 336	$6 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-7}$
	IX 388	$2 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$
	X 459		$10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$
	IX 459			$4 \cdot 10^{-6}$
	IX 249	$2 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-7}$	
	X 261	$10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-6}$	
	XI 289	$2 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$10^{-6}$
	XII 349	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-6}$
	XIII 350	$10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-5}$
	XIV 409		$10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-5}$
				$5 \cdot 10^{-6}$

Tab. 1. Ionisationsenergien und auf die Elektronendichte bezogene Teilchendichten.

Mit den Werten  $n_i/n_e$  sind auch die Absolutwerte der einzelnen Ionen zu ermitteln, wenn man die Teilchendichte der Elektronen nach der korrigierten Baum bach-Formel<sup>9</sup>

$$n_e(\varrho) = 10^8 \left( \frac{1,55}{\varrho^6} + \frac{2,99}{\varrho^{16}} \right) \quad (3)$$

<sup>9</sup> S. Baum bach, Astron. Nachr. **263**, 121 [1937]; H. C. van de Hulst, Astrophys. J. **105**, 471 [1947]; M. Waldmeier, Astron. Mitt. Sternw. Zürich **154** [1948].

verwendet. Dabei ist  $\varrho$  der Abstand vom Sonnenmittelpunkt in Einheiten des Sonnenradius.

Auf die Höhe oberhalb der Photosphäre, in der die hohe Koronatemperatur erreicht wird, kann aus der Ergiebigkeit im Lichte der grünen Koronalinie geschlossen werden. Nach Petri<sup>10</sup> wird ihr Maximalwert schon bei etwa 0'.3 bis 0'.4 erreicht. d. h. in einer Höhe von etwa 14000 km. Dieser Wert entspricht dem von Piddington<sup>11</sup> aus radioastronomischen Beobachtungen abgeleiteten Modell des Temperaturübergangs Chromosphäre-Korona. Er führt auf  $\varrho = \varrho_0 = 1,02$ . Bei der Berechnung der Ausstrahlung der Korona spielt das über den von ihr eingenommenen Raum integrierte Quadrat der Elektronendichte eine Rolle. Hierfür erhält man dann

$$4\pi R_\odot^2 \int_{\varrho_0}^{\infty} n_e^2(\varrho) \varrho^2 d\varrho = 3,2 \cdot 10^{49} \quad (4)$$

## II. Kontinuierliche Emission der Korona

Es soll nun die Energie berechnet werden, die von der gesamten Korona in einer Sekunde durch Photorekombinationen und frei-frei-Übergänge emittiert wird. Aus ihr erhält man dann in einfacher Weise die Strahlungsintensität in Erdentfernung.

Bekanntlich wird die Korona schon im Gebiet der dm-Wellen optisch dünn. Da der kontinuierliche Absorptionskoeffizient proportional zu  $1/\nu^3$  ist, gilt dies für frei-frei-Übergänge bei kurzwelligerer Strahlung erst recht. Daß auch die Übergänge aus diskreten Zuständen für die Absorption keine Rolle spielen, wird in Abschnitt (III, 5) verifiziert werden. Infolgedessen kann die gesamte Koronastrahlung berechnet werden, indem man die Teilemissionen der einzelnen Volumelemente addiert.

In engem Zusammenhang mit dem Mechanismus des Ionisationsgleichgewichts steht die Emission durch Photorekombinationen. Diese soll deshalb zuerst betrachtet werden.

### 1. Ausstrahlung durch Photorekombinationen je Volumeinheit

Sind in der  $n$ -ten Schale  $\bar{\xi}_n$  leere Plätze vorhanden, so ist der Wirkungsquerschnitt für Photorekombinationen [A, Gl. (13a)] mit  $\bar{\xi}_n/2n^2$  zu multiplizieren. Unter entsprechender Verallgemeinerung der Gl. (15) in A erhält man mit Hilfe der Maxwellschen

<sup>10</sup> W. Petri, Naturwiss. **38**, 155 [1951].

<sup>11</sup> J. H. Piddington, Proc. Roy. Soc. A **203**, 417 [1950].

Geschwindigkeitsverteilung für die Zahl der spontanen Rekombinationen von  $n_{i+1}$  Ionen je  $\text{cm}^3$  mit  $n_e$  Elektronen je  $\text{cm}^3$  im Energieintervall zwischen  $E$  und  $E+dE$

$$n_{i+1} n_e \frac{4 \Phi_0 c}{\sqrt{3\pi}} \frac{\bar{\zeta}_{n_0}}{n_0} \left( \frac{\chi_{n_0}}{kT} \right)^{3/2} \left( \frac{\chi_{n_0}}{\chi_H} \right)^{1/2} \frac{e^{-E/kT}}{h\nu} dE. \quad (5)$$

Hierin ist der Thomson-Streukoeffizient

$$\Phi_0 = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \quad (6)$$

als Flächeneinheit eingeführt.

Aus dieser Formel kann einmal die Gesamtzahl der Rekombinationen gewonnen werden. Dabei ist der Energiesatz

$$h\nu = E + \chi_{n_0} \quad (7)$$

zu verwenden, über alle Elektronenenergien zu integrieren und über die Beiträge aller in Betracht kommender Schalen zu summieren. Es ergibt sich dann, daß die Rekombinationen hauptsächlich in die höheren Schalen erfolgen. Infolgedessen können bei der Summation alle Schalen außer den voll besetzten in guter Näherung als leer angesehen werden. Man erhält nach A für die Gesamtzahl der Rekombinationen

$$z_R = n_{i+1} n_e Q_{21} \quad (8)$$

$$= n_{i+1} n_e \frac{8 \Phi_0 c f_1}{\sqrt{3\pi}} \left( \frac{\chi_H}{kT} \right)^{1/2} \frac{\chi_{n_0}}{\chi_H} n_0 G_1 \left( \frac{\chi_{n_0}}{kT} \right) g$$

Die Bedeutung von  $G_1(x)$  und  $g$  wurde schon in Abschnitt I, 1 bei der Ionisationsformel angegeben.

Für die Zahl der Stoßionisationen je  $\text{cm}^3$  erhält man nach A auf Grund experimenteller und theoretischer Untersuchungen des Wirkungsquerschnitts und unter Verwendung der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung

$$z_I = n_i n_e S_{12} \quad (9)$$

$$= n_i n_e \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Phi_0 c f_2}{\alpha^3} \bar{\zeta}_{n_0} \left( \frac{kT}{\chi_{n_0}} \right)^{1/2} \left( \frac{\chi_H}{\chi_{n_0}} \right)^{3/2} e^{-\chi_{n_0}/kT} G_2.$$

Die Funktion  $G_2$  entsteht durch die Nachbildung der Ionisierungsfunktion, ist von  $\chi_{n_0}/kT$  schwach abhängig und in A tabuliert.

Durch Gleichsetzung von  $z_I$  und  $z_R$  resultiert die bereits angegebene Ionisationsformel.

Aus (5) kann andererseits auch die Energie berechnet werden, die in das Frequenzintervall  $d\nu = dE/h$  emittiert wird. Führt man die Grundkonstanten  $\chi_H$  als Energieeinheit,  $a_0$  als Längeneinheit sowie die Sommerfeldsche Feinstruktur-Konstante  $\alpha$  ein, so erhält man für die Emission je  $\text{cm}^3$  und sec

$$j_\nu^{\text{fg}} d\nu = n_{i+1} n_e 2^7 \left( \frac{\pi}{3} \right)^{3/2} f_1 a_0^3 \chi_H \alpha^3 \left( \frac{\chi_H}{kT} \right)^{3/2} \left( \frac{\chi_{n_0}}{\chi_H} \right)^2 \frac{\bar{\zeta}_{n_0}}{n_0} e^{(\chi_{n_0} - h\nu)/kT} d\nu \quad (10)$$

Zur Berechnung der spektralen Ausstrahlung der Korona ist über alle Atomarten, die durch die Kernladung  $Z$  charakterisiert werden, sowie alle Ioni-

sationsstufen  $i$  zu summieren. Es sei  $n_{Zi}$  die Zahl der Ionen der Ordnungszahl  $Z$  und des Ionisationsgrades  $i$  je  $\text{cm}^3$ ,  $\chi_{n_0 Zi}$  die Ionisationsenergie dieser Ionen. Die Emission je  $\text{cm}^3$ , sec und Frequenzintervall  $d\nu$  ist dann gegeben durch

$$J_\nu^{\text{fg}} d\nu = C n_e^2 \left( \frac{\chi_H}{kT} \right)^{3/2} e^{-h\nu/kT} \sum_{h\nu \geq \chi_{n_0 Zi}}^{(z)} \sum^{(i)} x_{zi} d\nu. \quad (11)$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt

$$C = 2^7 \left( \frac{\pi}{3} \right)^{3/2} \alpha^3 \chi_H a_0^3 f_1 = 1,7 \cdot 10^{-40} f_1 [\text{erg cm}^3] \quad (12)$$

und

$$x_{zi} = e^{\chi_{n_0 Zi}/kT} \frac{n_{z, i+1}}{n_e} \frac{\bar{\zeta}_{n_0, Z, i+1}}{n_0} \left( \frac{\chi_{n_0 Zi}}{\chi_H} \right)^2. \quad (13)$$

Schließlich kann die Gesamtemission eines  $\text{cm}^3$  je sec berechnet werden. Man erhält sie durch Integration über alle Frequenzen von  $\nu_{n_0 Zi} = \chi_{n_0 Zi}/h$  bis  $\infty$ :

$$J^{\text{fg}} = \frac{4f_1}{\sqrt{3\pi}} \Phi_0 c \chi_H n_e^2 \left( \frac{\chi_H}{kT} \right)^{1/2} \sum^{(z)} \sum^{(i)} y_{zi} \quad (14)$$

mit

$$y_{zi} = \frac{n_{z, i+1}}{n_e} \frac{\bar{\zeta}_{n_0, Z, i+1}}{n_0} \left( \frac{\chi_{n_0 Zi}}{\chi_H} \right)^2 = x_{zi} e^{-\chi_{n_0 Zi}/kT}. \quad (15)$$

In Gl. (11) wurden nur die Einfänge in das Grundniveau berücksichtigt. Tatsächlich erfolgen sie auch in höhere Schalen. Die dabei entstehenden einzelnen Kanten treten jedoch kaum hervor; da sich ihre Berechnung nicht lohnen würde, werden sie später im Spektrum weggelassen. Sie liefern jedoch in ihrer Summe einen nicht ganz zu vernachlässigenden Beitrag zur Emission. Für ein bestimmtes Ion ist die Gesamtemission nach (15) proportional zu

$$\frac{\bar{\zeta}_n}{2n} \left( \frac{\chi_n}{\chi_H} \right)^2 = Z^{\text{eff}^4} \frac{\zeta_n}{2n^2} \frac{1}{n^3}.$$

Das Verhältnis der Energieemission bei Rekombination in höhere Schalen zur Emission bei Rekombination ins Grundniveau  $n_0$  werde mit  $v'$  bezeichnet. Es ist dann

$$v' = \frac{\sum_{n_0+1}^{\infty} 1/n^3}{(\bar{\zeta}_{n_0}/2n_0^2)(1/n_0^3)} = \frac{2n_0^2}{\bar{\zeta}_{n_0}} n_0^3 \left\{ \zeta(3) - \sum_1^{n_0} \frac{1}{n^3} \right\}. \quad (16)$$

Dabei ist  $\zeta(3)$  die Riemannsche  $\zeta$ -Funktion mit dem Argument 3. Für  $n_0 = 1; 2; 3$  ist daher  $v' \zeta_{n_0}/2n_0^2 = 0,2; 0,6; 1,1$ . Die Gesamtemission unter Berücksichtigung der Rekombinationen in höhere Schalen erhält man also durch Multiplikation von (15) mit  $w = 1 + v'$ .

## 2. Ausstrahlung durch frei-frei-Übergänge je Volumeneinheit

Elektronen strahlen im Feld der Atomkerne auch dann Energie aus, wenn sie nicht eingefangen, son-

dern nur abgelenkt werden. Die von  $n_i$  Ionen je  $\text{cm}^3$  der Kernladung  $Z$  und  $n_e$  Elektronen je  $\text{cm}^3$  pro sec in das Frequenzintervall  $d\nu$  spontan ausgestrahlte Energie ist gegeben durch

$$j_{\nu}^{\text{ff}} d\nu = n_i n_e \frac{2^7 \pi^3}{(6\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{kT}\right)^{1/2} \cdot \frac{e^8 Z^2}{c^3 m^2} e^{-h\nu/kT} \bar{g} d\nu. \quad (17)$$

Der obige Ausdruck wird in der Regel mit Hilfe des Absorptionskoeffizienten und unter Anwendung des Kirchhoffschen Satzes abgeleitet, also unter der Voraussetzung thermodynamischen Gleichgewichts für die Strahlung. Diese Bedingung ist in der Korona aber nicht erfüllt. (17) läßt sich jedoch wie im Falle der Übergänge von kontinuierlichen zu gebundenen Zuständen aus der Zahl der Emissionen gewinnen<sup>12</sup>. Dabei tritt der in der Theorie des Absorptionskoeffizienten geläufige Gaunt-Faktor<sup>13</sup> auf, der je nach den verwendeten Näherungen verschiedene Form hat. Im vorliegenden Fall ist es nicht nötig, den endlichen Abstand der ablenkenden Ionen zu berücksichtigen. Die Bedingung dafür, daß die Rechnung für den einzelnen Kern verwendet werden kann, lautet nach Burkhardt, Elwert und Unsöld<sup>14</sup>

$$\pi\nu \gg \sqrt{\frac{kT}{m}} n_i^{1/3}. \quad (18)$$

In der Korona bedeutet dies ungefähr die Bedingung  $\nu \gg 10^{10}$ , die gut erfüllt ist. Für die Strahlung im Coulomb-Feld eines Kerns gilt nach einer wellenmechanischen Rechnung von Elwert<sup>15</sup> unter der Bedingung  $(\alpha Z/\beta) \ll 1$  die Gaunt-Mauesche Formel<sup>13,16</sup>, andernfalls die Kramersche. Dabei ist  $\beta$  die Elektronengeschwindigkeit in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit. Für  $T = 7 \cdot 10^5$  Grad wird  $\beta = 1,9 \cdot 10^{-2}$  und damit für Protonen  $(\alpha Z/\beta) = 0,4$ . Es kann deshalb noch die Formel von Gaunt und Maue verwendet werden.

Durch Integration über alle Geschwindigkeiten der Elektronen ergibt sich der gemittelte Gaunt-Faktor

$$\bar{g} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{4kT}{h\nu\xi}, \quad (19)$$

wobei  $\ln\xi$  die Eulersche Konstante ist.

Geht man in (17) zu den hier wie in A verwendeten Naturkonstanten über, so erhält man für die Energie, die durch frei-frei-Übergänge je  $\text{cm}^3$  und sec in das Frequenzintervall  $d\nu$  ausgestrahlt wird,

$$J_{\nu}^{\text{ff}} d\nu = \sum_Z n_i n_e C Z^2 \left(\frac{\chi_H}{kT}\right)^{1/2} e^{-h\nu/kT} \bar{g} d\nu. \quad (20)$$

Hierin ist  $C$  die in (12) definierte Konstante. Bei der Summation über die Kernladung  $Z$  sind nur die Elemente H und He zu berücksichtigen, von der  $Z$ -Abhängigkeit in  $\bar{g}$  kann abgesehen werden. Der

Vergleich des Beitrages der frei-frei-Ausstrahlung mit dem der Wasserstoffrekombinationen ergibt dann nach (11), daß die Intensität der letzteren zu multiplizieren ist mit

$$\frac{1,6 \bar{g}}{2 (\chi_H/kT) \cdot e^{\chi_H/kT}} = 2,9 \bar{g} \text{ für } T = 7 \cdot 10^5 \text{ Grad.} \quad (21)$$

$$\begin{array}{cccc} \text{Für } \lambda = & 912 & 456 & 228 & 114 \text{ \AA} \\ \text{ist } \bar{g} = & 1,3 & 0,9 & 0,5 & 0,1. \end{array}$$

Die frei-frei-Übergänge sind also in dem Bereich, in dem die Strahlung des Wasserstoffs wesentlich ist, zu berücksichtigen und liefern dort sogar größere Intensität, als die H-Rekombinationen. Ihre Bedeutung nimmt nach kürzeren Wellen ab. Außerdem wird im kontinuierlichen Spektrum bei 228 Å die Strahlung des He und bei noch kleineren Wellenlängen die der schwereren Elemente wichtig, so daß dann die Übergänge zwischen kontinuierlichen Zuständen vernachlässigt werden können.

### 3. Kontinuierliches Spektrum, Gesamtemission und Strahlungsintensität in Erdentfernung

Die Ausstrahlung der Volumeneinheit ist sowohl bei den Übergängen frei-gebunden wie bei den Übergängen frei-frei proportional zur Ionendichte wie zur Elektronendichte und damit bei konstanter Koronatemperatur auch proportional zu  $n_e^2$ . Die gesamte Ausstrahlung folgt daher durch Integration des Quadrats der Elektronendichte über die Korona. Dieses Integral wurde bereits (4) angegeben.

Da die Lichtquanten hauptsächlich von den tiefsten Schichten der Korona emittiert werden, in denen die Dichte am größten ist, wird etwa die Hälfte nach außen dringen. Andererseits führen die Dichteschwankungen in der Korona zu einer Vergrößerung des Integrals. Die Baumbachsche Formel ist aus einer über viele Beobachtungen gemittelten Helligkeitsverteilung der Korona gewonnen. Diese kommt durch lineare Überlagerung der Beiträge der einzelnen streuenden Elektronen zustande, ist also längs eines Sehstrahls proportional zur Elektronenzahl  $\int n_e ds$ . Treten in ihm Dichteschwankungen auf, so vergrößert sich bei konstanter Elektronenzahl das Integral  $\int n_e^2 ds$ , da der quadratische Mittelwert einer nicht konstanten Größe

<sup>12</sup> G. Cillié, Monthly Not. Roy. Astr. Soc. **92**, 820 [1932].

<sup>13</sup> J. A. Gaunt, Proc. Roy. Soc. A **126**, 654 [1930].

<sup>14</sup> G. Burkhardt, G. Elwert u. A. Unsöld, Z. Astrophys. **25**, 310 [1948].

<sup>15</sup> G. Elwert, Z. Naturforschg. **3a**, 477 [1948].

<sup>16</sup> A. W. Maue, Ann. Phys. Lpz. (5) **13**, 161 [1932].

stets höher ist als der lineare. Zur statistischen Erfassung der Dichteschwankungen werde deshalb die ausgestrahlte Intensität mit einem Faktor  $Q \geq 1$  multipliziert, der Werte zwischen 1 und etwa 2 bis 3 annehmen kann. Er wurde bei der Emission von Wellen des Radiogebietes von Reule<sup>6</sup> in Rechnung gestellt.

Um die Strahlungsintensität in Erdentfernung zu erhalten, hat man die gesamte sekundliche Ausstrahlung der Korona durch die Oberfläche einer Kugel vom Radius der Entfernung Erde—Sonne  $R = 1,5 \cdot 10^{13}$  cm zu dividieren. Führt man statt der Frequenzskala die Wellenlängenskala ein und setzt  $f_1 = 1$ , so erhält man für die Strahlungsintensität der Grenzkontinua im Wellenlängenintervall  $d\lambda$  in cm

$$I_{\lambda}^{fg} d\lambda_{[cm]} = 2,9 \cdot 10^8 Q \left( \frac{\chi_H}{kT} \right)^{3/2} \frac{e^{-143/\lambda_{[Å]}}}{\lambda^2_{[Å]}} \sum_{h\nu \geq \chi_{n_0,zi}}^{(z)} \sum^{(i)} x_{zi} d\lambda_{[cm]} \quad (22)$$

und für ihre Gesamtintensität

$$I^{fg} = 3,1 \cdot 10^{-3} Q \left( \frac{\chi_H}{kT} \right)^{1/2} \sum^{(z)} \sum^{(i)} y_{zi} w. \quad (23)$$

Für die Intensität durch frei-frei-Übergänge ergibt sich

$$I_{\lambda}^{ff} d\lambda_{[cm]} = 3,5 \cdot 10^8 Q \left( \frac{\chi_H}{kT} \right)^{1/2} \frac{e^{-143/\lambda_{[Å]}}}{\lambda^2_{[Å]}} \bar{g} d\lambda_{[cm]}. \quad (24)$$

Geht man von den Ionisationsenergien zu den entsprechenden Wellenlängen der Kanten über und ordnet nach diesen, so erhält man für  $7 \cdot 10^5$  Grad die in Tab. 2 aufgeführten Werte für die Faktoren  $y_{zi} w$ , die die Energie der Grenzkontinua bestimmen. Dabei sind die Elemente in den vor den Rekombinationen vorhandenen Ionisationsstufen angegeben. Danach liefert He den größten Beitrag; die entsprechende Strahlungsintensität in Erdentfernung ist  $8 \cdot 10^{-3} Q$  erg/cm<sup>2</sup> sec, die Intensität der H-Strahlung ist  $3 \cdot 10^{-3} Q$  erg/cm<sup>2</sup> sec und die der schwereren Elemente zusammen  $4 \cdot 10^{-3} Q$  erg/cm<sup>2</sup> sec, während die Strahlungsintensität durch frei-frei-Übergänge unterhalb von etwa 900 Å ungefähr  $10^{-2} Q$  erg/cm<sup>2</sup> sec beträgt. Der gesamte Energieverlust der Korona durch Strahlung unterhalb dieser Wellenlänge ist etwa  $7 \cdot 10^{25} Q$  erg/cm<sup>2</sup> sec.

Die kontinuierliche Ausstrahlung der Korona in diesem Wellenlängenbereich wurde zuerst von Kiepenheuer<sup>17</sup> untersucht. Er betrachtete nur die Ausstrahlung von Wasserstoff durch Rekombinationen

und durch frei-frei-Übergänge ohne den Faktor  $\bar{g}$ . Seine Werte waren deshalb wesentlich kleiner und lagen beträchtlich unter denen, die für die Theorie der Ionosphäre erforderlich sind. Biermann und ten Bruggencate<sup>18</sup> erwähnen in ihrer Arbeit über die Einsammlung interstellarer Materie durch die Sonne ebenfalls eine Abschätzung des Energieverlusts der Korona. Sie geben je cm<sup>2</sup> Sonnenoberfläche  $10^3 \sqrt{T}/10^6$  erg/cm<sup>2</sup>·sec an. Dieser Verlust soll durch H-Rekombinationen zustande kommen, die sie allein berücksichtigen; allerdings sollte sich hierfür eine andere Temperaturabhängigkeit ergeben. Die entsprechende Strahlungsintensität in Erdentfernung von  $2 \cdot 10^{-2} \sqrt{T}/10^6$  erg/cm<sup>2</sup>·sec ist zwar merklich größer, als die oben für die H-Rekombinationen gefundene, aber etwa gleich groß, wie unsere Gesamtintensität für  $Q = 1$ . Schließlich haben Allen und Woolley<sup>4</sup> Abschätzungen der Energie der kurzwelligen Koronastrahlung durchgeführt. Sie setzen  $T = 10^6$  Grad, vernachlässigen den Faktor  $\bar{g}$ , berücksichtigen jedoch He und überschlägig auch die schwereren Elemente. Obwohl ihre Resultate im einzelnen von unseren abweichen, führen sie doch auch zu einem gesamten Energieverlust der Korona von etwa derselben Größe, wie er sich nach den obigen Formeln ohne Dichteschwankungen ergibt.

Schließlich soll noch die spektrale Intensitätsverteilung betrachtet werden. Bei der Überlagerung der Kanten sind die Summen über die  $x_{zi}$  zu bilden.

	$\lambda_{\text{Kante}}$	$y_{zi} w$	$\Sigma x_{zi}$
H II	912	2	2
He III	227	5	11
N VI	126	0,2	12
O VII	90	0,5	15
Ne VIII	59	0,2	20
Ne IX	52	1,1	55
Fe XI	47	0,04	56
Mg IX	46	0,03	57
Fe XII	43	0,1	63
Si IX	41	0,03	66
Mg X	38	0,05	73
S IX	37	0,03	74
Fe XIII	35	0,04	80
Si X	35	0,03	86
C VI	32	0,14	146
N VII	22	0,01	230

Tab. 2.

Sie sind in der letzten Spalte von Tab. 2 für die Wellenlängen angegeben, bei denen die Intensitätssprünge erfolgen. Mit diesen Werten und unter Addition der Strahlung durch die frei-frei-Übergänge wurde das in Abb. 2 wiedergegebene kontinuierliche Spektrum der Sonnenkorona für  $7 \cdot 10^5$  Grad gezeichnet. Es wurde für  $Q = 2$  zusammen mit der entsprechenden Kurve für  $10^6$  Grad schon in einer früheren Notiz mitgeteilt<sup>19</sup>. Abb. 2 gibt die mit dem Faktor  $Q$  dividierte Strahlungsintensität in Erdent-

<sup>17</sup> K. O. Kiepenheuer, Ann. Astrophys. 8, fasc. 3—4.

<sup>18</sup> L. Biermann u. P. ten Bruggencate, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. 19 [1946].

<sup>19</sup> G. Elwert, Z. Naturforsch. 7a, 202 [1952].

fernung wieder. Zum Vergleich ist die Strahlungsintensität durch die H-Rekombinationen allein sowie die Intensität der Photosphärenstrahlung als Emission eines schwarzen Körpers von 5700<sup>0</sup> eingetragen. Unterhalb von etwa 800 Å überwiegt also die Strahlung der Korona. Es ist jedoch zu beachten, daß der Übergang der Emission der Photosphäre zu der der Korona durch die Strahlung der Schicht zwischen Chromosphäre und Korona in etwa 10000 km Höhe modifiziert wird. Die Koronastrahlung wird

Schalen zur Entstehung angeregter Zustände der Ionen. Da die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ion in einer Sekunde eine Stoßionisation bzw. eine Photo-rekombination erlebt, nach (8), (9) etwa von der Größenordnung 10<sup>-2</sup> bis 10<sup>-6</sup> ist, geht es unter Photonenemission in den Grundzustand über. Außerdem können angeregte Zustände dadurch entstehen, daß Elektronen vom Grundzustand aus in höhere Schalen gehoben werden. Hierbei spielen Elektronenstöße wie bei den Ionisationen die wesentliche Rolle.

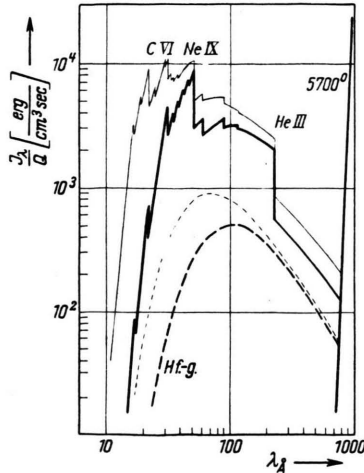


Abb. 2. Kontinuierliches Spektrum der Sonnenkorona. Strahlungsintensität  $I$  in Erdentfernung je  $\text{cm}^2$ ,  $\text{sec}$  und Wellenlängenintervall  $d\lambda$  in  $\text{cm}$ , dividiert durch Dichteschwankungsfaktor  $Q$ , — für  $7 \cdot 10^5$  Grad, — für  $10^6$  Grad. Zum Vergleich ist die Ausstrahlung durch H-Rekombinationen eingezeichnet, --- für  $7 \cdot 10^6$  Grad, - - - für  $10^6$  Grad. Die Strahlung der Photosphäre ist als Emission eines schwarzen Körpers von 5700<sup>0</sup> eingetragen.

mit abnehmender Wellenlänge rasch um mehrere Zehnerpotenzen größer als die der Photosphäre. Die Kanten von He III, Ne IX und C VI treten besonders hervor. In der Wellenlängenskala bildet sich ein Intensitätsmaximum aus, das für  $7 \cdot 10^5$  Grad bei etwa 50 Å, für  $10^6$  Grad bei etwa 30 Å liegt. Es würde bei schwarzen Körpern dieser Temperaturen nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz auch etwa bei denselben Wellenlängen auftreten. Nur würde ihre Emission um mehrere Zehnerpotenzen größer sein als die der optisch dünnen Korona.

### III. Linienemission der Korona

Zu dem kontinuierlichen Spektrum kommt noch das Linienspektrum hinzu. Schon der Rekombinationsmechanismus führt durch Einfang in höhere

#### 1. Wellenlängen der Linien im Gebiet weicher Röntgenstrahlen

Die Energie eines Elektrons in der  $n$ -ten Schale ist bei einem wasserstoffähnlichen Ion der effektiven Kernladung  $Z_{\text{eff}}$  gegeben durch

$$E_n = -\chi_H \left( \frac{Z_{\text{eff}}}{n} \right)^2 \text{ mit } Z_{\text{eff}} = n_0 \sqrt{\frac{\chi_{n_0}}{\chi_n}}. \quad (25)$$

Die Diskussion des Anregungsvorganges im Röntgengebiet ergibt nun, daß im wesentlichen nur das nächste über dem Grundniveau  $n_0$  liegende Niveau  $n_0 + 1$  in Betracht zu ziehen ist. Die Energiedifferenz ist dann

$$\Delta E = \chi_{n_0} \left[ 1 - \left( \frac{n_0}{n_0 + 1} \right)^2 \right], \quad (26)$$

also für  $n_0 = 1, 2, 3$   
wird  $\Delta E/\chi_{n_0} = 3/4, 5/9, 7/16$ .

Nun stellt Gl. (26) natürlich nur eine Näherung dar. Einmal gilt die aus der Ionisationsenergie  $\chi_{n_0}$  ermittelte effektive Kernladung nur für das Grundniveau; für die höheren Niveaus ist die Abschirmung der Elektronen stärker. Die Energiedifferenz ist also in Wirklichkeit etwas größer, die Wellenlängen der emittierten Linien werden ein wenig kleiner. Außerdem sind die Niveaus aufgespalten. Doch sind die Termdifferenzen innerhalb der Schalen gleicher Hauptquantenzahl bei dem hohen Ionisationsgrad klein gegenüber den Termdifferenzen der einzelnen Schalen untereinander. Bekanntlich kommen die im sichtbaren Spektralgebiet liegenden Koronalinien durch Übergänge innerhalb der Schalen bei Energiedifferenzen der Größenordnung einiger Volt zustande. Hingegen sind die Energiedifferenzen der inneren Schalen von der Ordnung 100 Volt. Es liegen nun für eine Reihe von Elementen experimentelle Werte der Terme für die in der Korona in Betracht kommenden Ionisationsstufen vor. In Tab. 3 sind zunächst die nach (26) berechneten Wellenlängen angegeben. Diese sind dann, soweit

möglich, mit den genauen Wellenlängen<sup>20</sup> bei Übergängen vom bzw. zum Grundzustand verglichen. Die beobachteten Werte sind danach maximal um etwa 10% kleiner als die nach der genannten Formel berechneten. Bei den Ionen, bei denen keine experimentellen Daten vorliegen, wurden die theoretischen entsprechend korrigiert. Die der weiteren Rechnung zugrunde gelegten Wellenlängen sind in der letzten Spalte aufgeführt.

	$\lambda_{\text{Kante}}$	$\lambda_{\text{Linie, theor.}}$	Übergang	$\lambda_{\text{Linie, exp.}}$	$\lambda_{\text{L}}$
He II	227	304	1s—2p	304	304
C IV	194	350	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> S <sub>1/2</sub> —1s <sup>2</sup> 3p <sup>2</sup> P <sub>1/2</sub>	312	312
	32	43	1s <sup>2</sup> <sup>1</sup> S <sub>0</sub> —1s 2p <sup>1</sup> P <sub>1</sub>	40	40
N V	126	230	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> S <sub>1/2</sub> —1s <sup>2</sup> 3p <sup>2</sup> P <sub>1/2</sub>	210	210
	22	30	1s <sup>2</sup> <sup>1</sup> S <sub>0</sub> —1s 2p <sup>1</sup> P <sub>1</sub>	29	29
O VI	90	160	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> S <sub>1/2</sub> —1s <sup>2</sup> 3p <sup>2</sup> P <sub>1/2</sub>	150	150
	VII	17	23	1s <sup>2</sup> <sup>1</sup> S <sub>0</sub> —1s 2p <sup>1</sup> P <sub>1</sub>	22
Ne VII	59	105		95	95
	VIII	52	93		85
Mg VIII	48	80	2s <sup>2</sup> 2p <sup>2</sup> P <sub>1/2</sub> —2s <sup>2</sup> 3d <sup>2</sup> D <sub>3/2</sub>	75	75
	IX	38	70	<sup>2</sup> P <sub>1/2</sub> — <sup>2</sup> D <sub>5/2</sub>	75
X	34	60	2s <sup>2</sup> <sup>1</sup> S <sub>0</sub> —2s 3p <sup>1</sup> P <sub>1</sub>	63	63
			<sup>2</sup> S <sub>1/2</sub> — <sup>2</sup> P <sub>3/2</sub>	58	58
Si VIII	40	70	2s <sup>2</sup> 2p <sup>2</sup> <sup>4</sup> S <sub>3/2</sub> —2s <sup>2</sup> 3p <sup>2</sup> 3s <sup>4</sup> P <sub>5/2</sub>	70	67
			<sup>4</sup> S <sub>3/2</sub> —3d <sup>4</sup> P <sub>5/2</sub>	67	
IX	34	60	2s <sup>2</sup> 2p <sup>2</sup> <sup>2</sup> S <sub>1/2</sub> —2s <sup>2</sup> 3p 3d <sup>1</sup> F <sub>3/2</sub> u.a.	64	55
			<sup>2</sup> D <sub>3/2</sub> — <sup>2</sup> F <sub>5/2</sub>	64	
X	30	54	2s <sup>2</sup> 2p <sup>2</sup> P <sub>3/2</sub> —2s <sup>2</sup> 3d <sup>2</sup> D <sub>3/2</sub>	58	51
			<sup>1</sup> D <sub>2</sub> — <sup>1</sup> F <sub>3</sub>	56	51
Fe IX	50	113	3s <sup>2</sup> 3p <sup>6</sup> <sup>1</sup> S <sub>0</sub> —3s <sup>2</sup> 3p <sup>4</sup> 4s <sup>3</sup> P <sub>1</sub>	105	105
	X	47	107	<sup>2</sup> P <sub>1/2</sub> — <sup>2</sup> P <sub>3/2</sub>	95
XI	43	98	3s <sup>2</sup> 3p <sup>4</sup> <sup>2</sup> P <sub>1/2</sub> —3s <sup>2</sup> 3p <sup>3</sup> 4s <sup>3</sup> S <sub>1</sub>	97	88
			<sup>2</sup> P <sub>3/2</sub> — <sup>2</sup> P <sub>3/2</sub>	96	
XII	35	80	<sup>2</sup> P <sub>1/2</sub> — <sup>2</sup> P <sub>3/2</sub>	98	
	XIII	32	73	<sup>2</sup> P <sub>1/2</sub> — <sup>2</sup> P <sub>3/2</sub>	87
			<sup>3</sup> P <sub>1</sub> — <sup>3</sup> P <sub>2</sub>	89	65
			<sup>3</sup> P <sub>2</sub> — <sup>3</sup> D <sub>2</sub>	88	
			<sup>3</sup> P <sub>2</sub> — <sup>3</sup> D <sub>2</sub>	87	

Tab. 3.

2. Linienemission durch Rekombination in höhere Schalen

Da der Faktor  $g$  in (8) angibt, wieviel mal größer die gesamte Rekombinationszahl gegenüber der Zahl der Rekombinationen in das Grundniveau  $n_0$  ist, so ist die Zahl der Einfänge in höhere Schalen gegeben durch eine Formel, die aus (8) entsteht, wenn man in ihr  $g$  durch  $g-1$  ersetzt. Die Energie

<sup>20</sup> H. Landolt u. R. Börnstein, Zahlenwerte und Funktionen I, 1, 1950 bzw. die dort angegebenen Originalarbeiten.

der Lichtquanten, die bei den Übergängen von höheren Niveaus in das Grundniveau emittiert werden, liegt zwischen  $\Delta E$  und  $\chi_{n_0}$ . Wenn Kaskadensprünge auftreten, wird die Anregungsenergie in kleinere Teilbeträge aufgeteilt. Die insgesamt emittierte Energie sei  $\chi_{n_0} m$ , wobei  $m$  zwischen 1 und den bei Gl. (26) angegebenen Werten liegt. Sie soll nun mit der Ausstrahlung durch Rekombinationen ins Grundniveau verglichen werden. Diese ist aus den Gln. (14) und (15) zu entnehmen. Für das Verhältnis der Energie der Linienemission zu der des Grenzkontinuums ergibt sich

$$\frac{j^{\text{LR}}}{j^{\text{fg}}} = \frac{2n_0^2}{\zeta_{n_0}} G_1 \left( \frac{\chi_{n_0}}{kT} \right) (g-1) m. \quad (27)$$

Bei He erhält man hierfür den Wert 0,3  $m$ , bei den schwereren Elementen liefern die Linien infolge der größeren  $g$ -Werte etwa die gleiche oder wenig größere Energie wie die Grenzkontinua. Da sich im folgenden ergeben wird, daß bei diesen Elementen die Stoßanregung noch wirksamer ist, kann auf genauere Angaben verzichtet werden.

3. Linienemission durch Stoßanregung je Volumeneinheit

Zur Berechnung der Zahl der Stoßanregungen benötigt man die entsprechenden Wirkungsquerschnitte. Da experimentelle Daten für Übergänge aus inneren Schalen nicht vorliegen, ist man auf die Aussagen der wellenmechanischen Theorie angewiesen. Stößt ein Elektron auf ein Wasserstoffatom oder ein Ion mit einem Elektron, so ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für Übergänge in höhere Schalen nach Born<sup>21</sup> gegeben durch

$$d\Phi_{n_0}^n(q) = \frac{128\pi^5 m^2 e^4}{K^2 h^4} \frac{dq}{q^3} |\epsilon_{n_0}^n(q)|^2 \quad (28)$$

$$= \frac{8\pi}{a_0^2 K^2} \frac{dq}{q^3} |\epsilon_{n_0}^n(q)|^2$$

mit 
$$\epsilon_{n_0}^n(q) = \int e^{iqx} \psi_{n_0} \psi_n^* d\tau. \quad (29)$$

Dabei ist  $K$  die Wellenzahl des stoßenden Teilchens,  $q$  der übertragene Impuls in Einheiten von  $\hbar$ ;  $\psi_{n_0}$  und  $\psi_n$  sind die Wellenfunktionen des Atomelektrons im Anfangs- bzw. Endzustand und zwar stehen  $n_0$  und  $n$  symbolisch für die Gesamtheit der Quantenzahlen in beiden Zuständen. Die Bornsche Stoßtheorie ist zwar ursprünglich auf Energien  $E$  des stoßenden Elektrons zugeschnitten, die groß

<sup>21</sup> M. Born, Z. Phys. 38, 803 [1926].



gegen die Ionisationsenergie sind. Eine im Prinzip allgemeinere Methode haben Morse und Stückelberg<sup>22</sup> angegeben. Da ihre Durchführung aber auf erhebliche mathematische Schwierigkeiten stößt, waren diese Autoren dazu gezwungen, Entwicklungen und damit wieder Näherungen einzuführen, die beträchtliche Unsicherheiten bedingen, so daß die größere Allgemeinheit des Ausgangspunktes nicht ausgenutzt werden kann. Daß diese Näherungen den Wert der Methode stark beeinträchtigen, zeigt sich z. B. schon daran, daß sich beim Übergang zur Bornschen Stoßtheorie nicht der aus (29) folgende Wirkungsquerschnitt, sondern ein erheblich größerer ergibt. Andererseits sind die mit der Bornschen Formel konsequent gerechneten Wirkungsquerschnitte für Stoßionisationen, die von Burhop<sup>23</sup> u. a. berechnet wurden, bis zur Ionisationsenergie herunter in guter Übereinstimmung mit experimentellen Werten, was aus Abb. 2 in A hervorgeht. Da Ionisationen und Anregungen physikalisch eng verwandte Vorgänge sind, dürfte es gerechtfertigt sein, die Bornsche Stoßtheorie auch bei Stoßanregungen für Energien  $E$  zu verwenden, die nur wenig oberhalb der Anregungsenergie liegen.

Allerdings führt bereits die Bornsche Theorie bei strenger Durchführung auf einen nicht ganz unbedeutlichen mathematischen Aufwand. Für Wasserstoff hat Bethe<sup>24</sup> die Rechnung für Übergänge aus der K-Schale ohne Vernachlässigungen durchgeführt, aber nur für große Energien diskutiert. Da die Atome in der Korona hochionisiert sind, wird das Coulomb-Feld auch bei der späteren Betrachtung von Mehrelektronensystemen eine gute Näherung darstellen. Es sind dann, wie bei Burhop begründet wurde, Wellenfunktionen für ein Coulomb-Feld der effektiven Kernladung  $Z_{\text{eff}}$  zu verwenden. An Stelle des Bohrschen Wasserstoffradius  $a_0$  tritt bei einem Coulomb-Feld der Kernladung  $Z$  der Quotient  $a_0/Z$ , so daß man unter sofort zu ersiehender Verallgemeinerung der Betheschen Rechnung für das Wasserstoffatom erhält

$$|\varepsilon_1^n(q)|^2 = (qa_0/Z)^2 2^{8n^7} \left[ \frac{1}{3}(n^2-1) + (qna_0/Z)^2 \right] \cdot \frac{\left[ (n-1)^2 + \left( \frac{qna_0}{Z} \right)^2 \right]^{n-3}}{[(n+1)^2 + (qna_0/Z)^2]^{n+3}}. \quad (30)$$

Um zum totalen Wirkungsquerschnitt zu kommen, ist (28) über alle Austrittswinkel  $\Theta$  des stoßenden

Teilchens zu integrieren. Dies bedeutet eine Integration über  $q$  und zwar im allgemeinen Fall zwischen den Grenzen

$$q_{\min} = \sqrt{2m/\hbar^2} (\sqrt{E} - \sqrt{E + E_{n_0} - E_n}) \text{ entspr. } \Theta = 0, \quad (31)$$

$$q_{\max} = \sqrt{2m/\hbar^2} (\sqrt{E} + \sqrt{E + E_{n_0} - E_n}) \text{ entspr. } \Theta = \pi. \quad (32)$$

Hierin ist  $E_{n_0}$  bzw.  $E_n$  die Energie des Elektrons in der  $n_0$ -ten bzw.  $n$ -ten Schale. Es ergibt sich dann für den totalen Wirkungsquerschnitt im Anschluß an Bethes Formel (50) und Umformung mit Hilfe der Beziehungen  $\hbar K = mv$  und  $2m/\hbar^2 = 1/\chi_H a_0^2$

$$\Phi_{1,n} = 4\pi a_0^2 (\chi_H/\chi_1)^2 |x_{1n}|^2 \{F_n(x_{\max}) - F_n(x_{\min})\}. \quad (33)$$

Es bedeutet

$$|x_{1n}|^2 = \frac{2^8}{3} \frac{n^7 (n-1)^{2n-5}}{(n+1)^{2n+5}} \quad (34)$$

das Quadrat des Matrixelementes des Übergangs  $1 \rightarrow n$  und

$$\begin{aligned} x_{\max} &= 1 + \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 \frac{q_{\max}^2 a_0^2}{Z^2} \\ &= 1 + \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 \frac{E}{\chi} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{E_{n_0} - E_n}{E}} \right)^2, \\ x_{\min} &= 1 + \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 \frac{q_{\min}^2 a_0^2}{Z^2} \\ &= 1 + \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 \frac{E}{\chi} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{E_{n_0} - E_n}{E}} \right)^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \ln \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4}, \\ F_3(x) &= F_2(x) - \frac{1}{x^5}. \end{aligned} \quad (36)$$

Zweckmäßigerweise bezieht man den Wirkungsquerschnitt für Stoßanregung wie den für Stoßionisation auf  $\pi a_0^2 (\chi_H/\chi_1)^2$  als Flächeneinheit. Es wird dann der reduzierte Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned} \Phi_{1\text{red}}^n &= \frac{\Phi_1^n}{\pi a_0^2 (\chi_H/\chi_1)^2} \\ &= 4 |x_{1n}|^2 \{F_n(x_1) - F_n(x_2)\} \cdot \frac{1}{U} \end{aligned} \quad (37)$$

eine Funktion des Verhältnisses der Elektronenenergie zur Ionisationsenergie  $U = E/\chi_1$  und der Quantenzahl  $n$  des angeregten Zustandes. Da die Quadrate der Matrixelemente

$$|x_{12}|^2 = 0,55, \quad |x_{13}|^2 = 0,09, \quad |x_{14}|^2 = 0,03 \quad (38)$$

<sup>22</sup> P. M. Morse u. E. C. G. Stückelberg, Ann. Phys. (5) 9, 579 [1931].

<sup>23</sup> E. H. S. Burhop, Proc. Camb. Phil. Soc. 36, 43 [1940].

<sup>24</sup> H. Bethe, Ann. Phys. (5) 5, 325 [1930].

mit wachsender Hauptquantenzahl der angeregten Schale rasch abnehmen, kommen nur die Übergänge in die tiefsten Schalen in Betracht. In der Abb. 3 ist der reduzierte Wirkungsquerschnitt für den Übergang in die L- und M-Schale eingetragen. Zum Vergleich ist auch der entsprechende Querschnitt für Stoßionisation nach A Abb. 2 mit eingezeichnet.

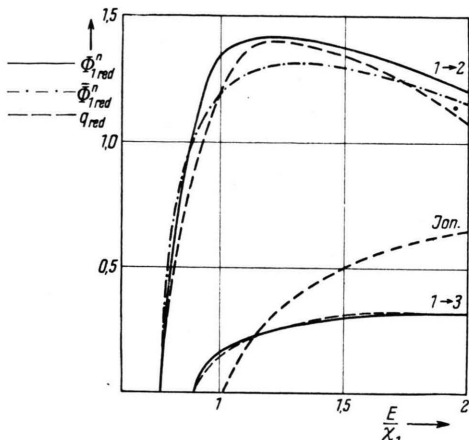


Abb. 3. Reduzierter Wirkungsquerschnitt für Stoßanregung, Übergänge aus der K-Schale in die L- und M-Schale.

Von Allen und Woolley<sup>4</sup> wurde bei Abschätzungen der Zahl der Stoßanregungen in der Korona die Gültigkeit folgender Formel für den Wirkungsquerschnitt angenommen:

$$q = 3\pi e^4 \frac{1}{E} \left( \frac{1}{h\nu} - \frac{1}{E} \right). \quad (39)$$

Dabei ist  $h\nu$  die Anregungsenergie. Eine Formel dieser Bauart ergibt sich im Anschluß an klassische Überlegungen Thomson's<sup>25</sup>, wenn man die Energie berechnet, die auf ein freies Elektron durch ein stoßendes der Energie  $E$  beim Stoßparameter  $d$  übertragen wird. Fordert man, daß sie mindestens gleich  $h\nu = \Delta E$  ist, setzt also  $q = \pi d^2$ , so ergibt sich (39) bis auf den Vorfaktor. Dieser wurde von Allen und Woolley durch die Bedingung bestimmt, daß  $q$  für Elektronenenergien  $E \gg h\nu$  den in diesem Geschwindigkeitsbereich von Bethe berechneten quantentheoretischen Wert annimmt. Die Extrapolation von großen  $E$  auf kleine mit Hilfe der klassischen Formel führt jedoch zu nicht unbedeutlichen Fehlern, da der Wirkungsquerschnitt beim Übergang von großen Energien zu kleineren nach der quantentheoretischen Rechnung langsamer zunimmt als nach der klassischen. Im vorliegenden Fall interessiert aber gerade das Verhalten des Wirkungsquerschnittes für Energien wenig oberhalb der Anregungsenergie  $h\nu$ . Eine Formel des Typs (39) ist

nun auch in diesem Bereich mit einem geeigneten Vorfaktor und unter Hinzufügung eines Korrektionsgliedes zu verwenden. Setzt man analog zu der Darstellung der Ionisierungsfunktion in A durch die dortige Gl. (23)

$$q_{red} = c_2 \frac{U\chi/\Delta E - 1}{U^2} \left[ 1 + c_3 (U\chi/\Delta E - 1) \right], \quad (40)$$

so ist beim Ansatz von Allen und Woolley  $c_2 = 12$  und  $c_3 = 0$  zu wählen. In Abb. 3 sind die nach der obigen Formel berechneten Anregungsfunktionen für  $n = 2$  mit  $c_2 = 3,8$  und  $n = 3$  mit  $c_2 = 1,1$  eingezeichnet; dabei ist  $c_3 = -0,2$  gesetzt. Sie geben die Funktionen (37) befriedigend wieder. Die von Allen und Woolley angenommenen Querschnitte sind also erheblich größer als die nach der Bornschen Stoßtheorie berechneten quantentheoretischen.

Die schwereren Elemente enthalten nun in der Sonnenkorona auch Elektronen in der L- und M-Schale. Bei Kugelkoordinaten gehört zu der Gesamtheit der Quantenzahlen außer der Hauptquantenzahl noch die azimutale Quantenzahl  $l$  und die magnetische  $m$ . Betrachtet man den Übergang von der  $n_0 l_0$ -Schale zur  $nl$ -Schale, so ist über die magnetische Quantenzahl zu mitteln. Man erhält dann für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$d\Phi_{n_0 l_0}^{nl} = \frac{8\pi}{a_0^2 K^2} \frac{dq}{q^3} \frac{\zeta_{n_0 l_0}}{2l_0 + 1} \sum_{m_0 = -l_0}^{m_0 = +l_0} \left| \int e^{iqx} \psi_{n_0 l_0 m_0} \psi_{nlm}^* d\tau \right|^2. \quad (41)$$

Hierin ist  $\zeta_{n_0 l_0}$  die Zahl der Elektronen in der  $n_0 l_0$ -Schale und es ist angenommen, daß die höhere Schale von Elektronen frei ist.

Die Darstellung der  $\psi$ -Funktion lautet in Kugelkoordinaten<sup>26</sup>

$$\psi_{nlm} = N \varrho^l L_{n+l}^{2l+1}(\varrho) e^{-\varrho/2} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (42)$$

mit  $\varrho = 2rZ/na_0$ ,  $N$  ist der Normierungsfaktor,  $L_{l+n}^{2l+1}$  das zugeordnete Laguerresche Polynom,  $P_l^m$  die zugeordnete Kugelfunktion. Da die Berechnung des Integrals (41) nicht ganz einfach ist, entwickelt Bethe die Exponentialfunktion und bricht die Entwicklung nach dem linearen Glied ab. Es soll nun die Güte dieser Näherung für verschiedene  $n_0$  untersucht werden. Bei größerem  $n_0$  wird der Abfall der  $\psi$ -Funktion mit wachsendem  $r$  infolge des Exponentialgliedes flacher. Wenn  $Zr/a_0 (1/n_0 + 1/n) > 1$  ist, erhält man keinen wesentlichen Beitrag mehr zum Integral, d. h. es kann  $r < r_0 = (a_0/Z)n n_0 / (n + n_0)$  angesehen werden; erst recht gilt dann  $qx < qr_0$ . Nun durchläuft  $q$  bei der nachfolgenden Integration Werte zwischen  $q_{min}$  und  $q_{max}$  nach Gl. (31, 32). Für große  $E$ , die Bethe im Auge hat, wird  $q_{min}$  klein; die  $q$ -Werte in der Nähe von  $q_{min}$  liefern bei der Integration über  $q$  den Hauptbeitrag.

<sup>25</sup> J. J. Thomson, Phil. Mag. J. Sci. **23**, 449 [1912].

<sup>26</sup> H. Bethe, Quantenmechanik der Ein- und Zwei-

Elektronenprobleme in: H. Geiger u. K. Scheel, Handbuch der Physik, XXIV, 1, Springer Berlin 1933.

Allerdings wächst  $q_{\max}$  wie  $\sqrt{E}$ . Für sehr große  $q$  heben sich andererseits die Beiträge der einzelnen Volumenelemente zum Integral auf. Es ist infolgedessen damit zu rechnen, daß die Entwicklung keinen großen Fehler bedingt. Für Energien  $E$  aber, die nur ein geringes Vielfaches  $V$  der Anregungsenergie  $\Delta E = E_n - E_{n_0}$  sind, wird der Fehler größer werden. Es ist nun

$$q_{\min} r_0 = \sqrt{\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n^2}} \frac{n n_0}{n + n_0} \{ \sqrt{V} - \sqrt{V-1} \},$$

$$q_{\max} r_0 = \sqrt{\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n^2}} \frac{n n_0}{n + n_0} \{ \sqrt{V} + \sqrt{V-1} \}. \quad (43)$$

Für  $V=1,5$  erhält man für die ersten drei Schalen  $q_{\min} r_0 = 0,28, 0,22$  und  $0,19$ ; ferner  $q_{\max} r_0 = 1, 0,9$  und  $0,7$ . Es sind also durch die Entwicklung der Exponentialfunktion in (41) merkliche Abweichungen gegenüber der strengen Rechnung zu erwarten; doch wird die Güte der Näherung für höhere Schalen trotz des flacheren Abfalls der  $\psi$ -Funktion etwa gleich der für die K-Schale sein.

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt erhält man nun durch die Entwicklung

$$d\Phi_{n_0 l_0}^{nl} = \frac{8\pi}{K^2 Z^2} \frac{\zeta_{n_0 l_0}}{2l_0 + 1} \cdot \sum_{m_0 = -l_0}^{m_0 = +l_0} \left| \int x \Psi_{n_0 l_0 m_0} \Psi_{nlm}^* d\tau \right|^2 \frac{dq}{q}. \quad (44)$$

Im Integral sind die Längen auf  $a_0$  als Längeneinheit bezogen; die  $\Psi$  sind Eigenfunktionen des Wasserstoffs. Die Summation<sup>26</sup> ergibt nun

$$\sum_{m_0 = -l_0}^{m_0 = +l_0} \left| \int x \Psi_{n_0 l_0 m_0} \Psi_{nlm}^* d\tau \right|^2 = \frac{1}{3} \text{Max}(l_0, l) (R_{n_0 l_0}^{nl})^2. \quad (45)$$

Dabei ist

$$R_{n_0 l_0}^{nl} = \int_0^\infty R_{n_0 l_0}(r) R_{nl}(r) r^3 dr \quad (46)$$

das über den radialen Teil der  $\Psi$ -Funktion gebildete elektrische Moment, das nur für

$$l_0 - l = \pm 1 \quad (47)$$

von Null verschieden ist. Durch Integration über alle  $q$  erhält man für den totalen Wirkungsquerschnitt mit  $U = E/\chi_{n_0}$

$$\overline{\Phi}_{n_0 l_0}^{nl} = 8\pi a_0^2 \left( \frac{\chi_{nl}}{\chi_{n_0}} \right)^2 \zeta_{n_0 l_0} \varphi_{n_0 l_0}^{nl} \cdot \frac{1}{U} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{U} \left( 1 - \frac{n_0^2}{n^2} \right)}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{U} \left( 1 - \frac{n_0^2}{n^2} \right)}}, \quad (48)$$

hierin ist

$$\varphi_{n_0 l_0}^{nl} = \frac{1}{n_0^2 (2l_0 + 1)} \frac{\text{Max}(l_0, l)}{3} (R_{n_0 l_0}^{nl})^2 \quad (49)$$

gesetzt. Diese Funktion hängt in einfacher Weise mit den Oszillatorenstärken zusammen. Für den Übergang eines Elektrons aus der K-Schale in die L-Schale folgt in dieser Näherung mit  $(R_{10}^{21})^2 = 3 |x_{12}|^2 = 1,66$

$$\overline{\Phi}_{10}^{21} = 8\pi a_0^2 \left( \frac{\chi_{11}}{\chi_1} \right)^2 0,55 \frac{1}{U} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - 3/4 U}}{1 - \sqrt{1 - 3/4 U}}. \quad (50)$$

Der Vergleich der obigen Funktion mit (37) lehrt nun, daß der Funktionstyp in beiden Fällen derselbe ist, die Absolutwerte des durch Entwicklung erhaltenen Wirkungsquerschnitts jedoch etwa 4-mal so groß sind. In Abb. 3 ist deshalb die Kurve für

$$\overline{\overline{\Phi}}_{10 \text{ red}}^{21} = \frac{\overline{\Phi}_{10}^{21}}{4\pi a_0^2 (\chi_{11}/\chi_1)^2} \quad (51)$$

mit eingezeichnet. Da die Güte der Näherung auch für Übergänge aus höheren Schalen etwa dieselbe ist, verwenden wir allgemein einen um den Faktor 4 verkleinerten Wirkungsquerschnitt, setzen also  $\overline{\overline{\Phi}}_{n_0 l_0}^{nl} = 1/4 \overline{\Phi}_{n_0 l_0}^{nl}$  und erhalten nach Summation über  $l$

$$\overline{\overline{\Phi}}_{n_0 l_0}^{nl} \text{ red} = \frac{\overline{\overline{\Phi}}_{n_0 l_0}^n}{\pi a_0^2 (\chi_{nl}/\chi_{n_0})^2 \zeta_{n_0 l_0}} = f_3 2 \sum_l \varphi_{n_0 l_0}^{nl} \cdot \frac{1}{U} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{U} \left( 1 - \frac{n_0^2}{n^2} \right)}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{U} \left( 1 - \frac{n_0^2}{n^2} \right)}}, \quad (52)$$

wobei  $f_3$  ein Unsicherheitsfaktor in der Nähe von 1 ist. Die damit erzielte Genauigkeit dürfte astrophysikalisch ausreichen, da durch die Dichteschwankungen in der Korona von vorneherein eine Unsicherheit um etwa den Faktor 2 bis 3 auftritt<sup>6</sup>. Es bleibt jedoch die prinzipielle Frage nach der strengen Lösung des Integrals (29), mit der auch eine Kontrolle unserer Näherung möglich ist. Diese Berechnung wird in einer anderen Arbeit des Verfassers<sup>27</sup> in parabolischen Koordinaten allgemein ausgeführt. Die anschließende Bestimmung des Wirkungsquerschnitts  $\overline{\Phi}_{21 \text{ red}}^{31}$  im Fall  $n_0 = 2, n = 3, m = 1$  ergibt dann nur geringfügige Abweichungen gegenüber (52).

Die interessierenden Werte von  $(R_{n_0 l_0}^{nl})^2$  sind bei Bethe<sup>26</sup> oder Unsöld<sup>28</sup> zu entnehmen.

Summiert man über  $l$ , so ergeben sich für  $\varphi_{n_0 l_0}^{nl} = \sum_l \varphi_{n_0 l_0}^{nl}$  die in Tab. 4 angegebenen Zahlen.

Eine nur von den Hauptquantenzahlen  $n_0$  und  $n$  abhängige Funktion ist

<sup>27</sup> G. Elwert, Z. Naturforschg. **9a** [1954] i. Ersch.

<sup>28</sup> A. Unsöld, Physik der Sternatmosphären, Springer Berlin 1938.

$$\bar{\Phi}_{n_0 \text{ red}}^n = \frac{\bar{\Phi}_{n_0 l_0}^n}{2f_3 \varphi_{n_0 l_0}^n} = \frac{1}{U} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{U} \left(1 - \frac{n_0^2}{n^2}\right)}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{U} \left(1 - \frac{n_0^2}{n^2}\right)}} \quad (53)$$

Sie ist in Abb. 4 für  $n_0=2, n=3$  und  $n_0=3, n=4$  dargestellt. Im Hinblick auf die nachfolgende Integration über alle Elektronengeschwindigkeiten wird sie zweckmäßigerweise noch durch Kurven (40) approximiert. Setzt man wieder  $c_3=-0,2$ , so erhält man ausreichende Übereinstimmung mit  $c_2=2,4$  für  $n_0=2, c_2=2$  für  $n_0=3$ . Die reduzierten Wirkungsquerschnitte selbst werden also ebenfalls dargestellt durch (40), wobei aber der Vorfaktor  $c_2$  zu ersetzen ist durch  $2C_{n_0 l_0}^n = 2c_2 \varphi_{n_0 l_0}^n$ . Mit den obigen Angaben über  $c_2$  und den Werten für  $\varphi_{n_0 l_0}^n$  in Tab. 4 ergeben sich die in der letzten Spalte dieser Tabelle aufgeführten  $C_{n_0 l_0}^n$ .

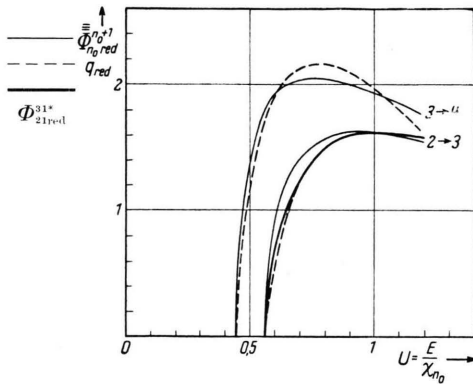


Abb. 4. Reduzierter Wirkungsquerschnitt für Übergänge aus der L- und M-Schale.

Mit Hilfe des Wirkungsquerschnitts  $q_n^*$  kann nun die Zahl der Stoßanregungen je  $\text{cm}^3$  und sec berechnet werden. Sie ist bei Bestehen einer Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung  $f(v)$  bekanntlich gegeben durch

$$n_1 n_e \int q_n^* v f(v) dv \quad (54)$$

Dieses Integral kann aus A entnommen werden, indem man in den dortigen Gln. (23) bis (24) für  $c_2$  und  $c_3$  die oben genannten Werte, statt  $\chi_n$  die Anregungsenergie  $\Delta E = h\nu$  und statt  $f_2$  den Unsicherheitsfaktor  $f_3$  setzt. Dann wird

$$z_A = n_1 n_e 4\sqrt{\pi} f_3 \alpha a_0^2 c \zeta_{n_0 l_0} C_{n_0 l_0}^n \cdot \left(\frac{\chi_{II}}{kT}\right)^{1/2} \frac{\chi_{II}}{h\nu} e^{-h\nu/kT} G_3 \left(\frac{h\nu}{kT}\right) \quad (55)$$

mit

$$G_3 \left(\frac{h\nu}{kT}\right) = 1,2 \left[ 1 - G_1 \left(\frac{h\nu}{kT}\right) \right] - 0,2 \frac{kT}{h\nu} \quad (56)$$

Multipliziert man  $z_A$  noch mit  $h\nu$ , so erhält man die je Volumeneinheit und Sekunde von dem betrachteten Ion in Linienform emittierte Energie  $j^L$ .

Die Zahl der Stoßanregungen wird mit zunehmender Anregungsenergie  $h\nu$  infolge des Exponentialfaktors der Maxwell-Verteilung sowie durch die Abnahme von  $(R_{n_0 l_0}^{n_1})^2$  mit wachsendem  $n$  rasch sehr klein. Für die Berechnung der Ausstrahlung bei den Übergängen, die den Hauptbeitrag liefern, genügt es deshalb, nur Anregungen des nächsten über dem Grundniveau  $n_0$  liegenden Niveaus  $n_0+1$  zu betrachten. Aus diesem Grunde sind auch die  $C_{n_0 l_0}^n$  in Tab. 4 nur für solche Übergänge angegeben.

$n_0$	$l_0$	$n$	$\varphi_{n_0 l_0}^n$	$C_{n_0 l_0}^n$
1	0	2	0,55	1,9
2	0	3	0,78	1,9
	1	3	1,3	3,1
3	0	4	1,1	2,2
	1	4	1,5	3
	2	4	2,3	4,6

Tab. 4.

Es werde nun zunächst  $j^L$  verglichen mit der bei den Rekombinationen ausgestrahlten Energie  $j^R$ . Dabei gehören zu Linien von Ionen der Ionisationsstufe  $i$  Grenzkontinua, die bei Rekombinationen von Ionen der nächst höheren Ionisationsstufe  $i+1$  entstehen. Der aus (14), (16) zu entnehmende Ausdruck für die von  $n_{i+1}$  Ionen je  $\text{cm}^3$  und sec ausgestrahlte Energie kann mit Hilfe der Ionisationsgleichung (1) umgeformt werden, indem man  $n_i$  an Stelle von  $n_{i+1}$  einführt. Bildet man dann den Quotienten der Emission einer durch Elektronenstoß angeregten Linie  $j^L$  zu der des entsprechenden Grenzkontinuums, so erhält man

$$\frac{j^L}{j^R} = \frac{f_3}{f_2} \frac{2n_0^2 g}{\zeta_{n_0} v} \frac{\zeta_{n_0 l_0} C_{n_0 l_0}^n}{\zeta_{n_0}} \frac{\chi_{n_0}}{kT} \frac{\chi_{n_0}}{h\nu} e^{(\chi_{n_0} - h\nu)/kT} G_3 \left(\frac{h\nu}{kT}\right) \quad (57)$$

Obwohl die Wirkungsquerschnitte für Stoßionisation und Stoßanregung von gleicher Größenordnung sind, so wird dieses Verhältnis doch für Differenzen von Ionisationsenergie und Anregungsenergie, die  $kT$  überschreiten, merklich größer als 1 und nimmt um so höhere Werte an, je größer  $\chi_{n_0}$  ist. Dies liegt an dem Exponentialfaktor der Maxwell-Verteilung, wie noch deutlicher wird, wenn man die Zahl der Ionisations- und Anregungsprozesse vergleicht. Für den Quotienten von  $z_A$  nach (55), (56) und  $z_I$  nach (9) findet man

$$\frac{z_A}{z_I} = \frac{f_3}{f_2} \frac{\zeta_{n_0 l_0} C_{n_0 l_0}^n}{\zeta_{n_0}} \frac{\chi_{n_0}}{kT} \frac{\chi_{n_0}}{h\nu} e^{(\chi_{n_0} - h\nu)/kT} G_3 \left(\frac{h\nu}{kT}\right) \quad (58)$$

Die anschauliche Bedeutung des schon in diesem Verhältnis auftretenden Exponentialfaktors ist folgende. Da die Anregungsenergie stets kleiner ist als die Ionisationsenergie, können Elektronen, deren Energie zur Ionisation noch nicht ausreicht, doch Anregungen hervorrufen. Der Unterschied in der Zahl beider Prozesse

wird bei schwereren Elementen beträchtlich. Die mittlere Energie der Elektronen beträgt bei  $7 \cdot 10^5$  Grad etwa 60 eV, die Ionisationsenergie ist, wenn man von H und He absieht, von der Größenordnung einiger 100 eV. Infolge des exponentiellen Abfalls von  $n_e$  mit zunehmender Energie überschreitet nur ein kleiner Bruchteil der Elektronen die Ionisationsenergie, ein relativ größerer aber die Anregungsenergie.

Da auf jede Ionisation eine Rekombination unter Aussendung eines Lichtquants, auf jede Stoßanregung eine Linienemission erfolgt, kann von der Zahl der Prozesse leicht auf die ausgestrahlte Energie übergegangen und damit (57) aus (58) abgeleitet werden.

Im folgenden soll nun direkt die gesamte durch Stoßanregungen von der Volumeneinheit in einer Sekunde emittierte Energie angegeben werden. Für sie folgt durch Summation über alle Ionen in allen Ionisationsstufen

$$J^L = n_e^2 4\sqrt{\pi} f_3 \alpha a_0^2 c \chi_H \left(\frac{\chi_H}{kT}\right)^{1/2} \sum_Z \sum_i Y_{Zi} \quad (59)$$

mit

$$Y_{Zi} = n_i/n_e \sum_{l_0} \zeta_{n_0 l_0} C_{n_0 l_0}^m e^{-h\nu/kT} G_3(h\nu/kT). \quad (60)$$

Für  $Y_{Zi}$  erhält man die in Tab. 5 aufgeführten Werte.

		$Y_{Zi} \cdot 10^6$ für			
		$\lambda$ [Å]	$6 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^5$	$10^6$ Grad
He	II	304	3	2	2
C	IV	312	0,08	0,02	
	V	40	0,4	0,6	1,5
	VI	33	0,01	0,06	0,7
N	V	210	0,3	0,3	0,2
	VI	29	0,07	0,3	2
	VII	19			0,1
O	VI	150	4	2	1
	VII	22		0,03	0,5
Ne	VII	95	4	2	
	VIII	85	9	7	7
Mg	VIII	75	1	0,5	
	IX	63	0,3	0,6	0,5
Si	X	58	0,02	0,15	0,6
	VIII	67	1,2	1,2	0,1
	IX	55	0,4	0,8	0,5
S	X	51	0,01	0,2	1
	XI	42			0,4
	VII	70	0,3	0,2	
	VIII	60	0,3	0,7	0,1
Fe	IX	52	0,05	0,3	0,4
	X	43			0,5
	IX	105	1	0,3	
	X	97	4	1,5	
	XI	88	4	5	0,7
	XII	73	1,3	4	3
	XIII	65	0,04	0,7	4
XIV	62		0,1	2	
XV	55			0,4	

Tab. 5.

Wie aus der Tabelle hervorgeht, führt das Zusammenwirken der einzelnen Faktoren — kosmische Häufigkeit der Elemente, Besetzung der Ionisationszustände und Anregungswahrscheinlichkeit — zu einem Hauptbeitrag von Ne und Fe, wobei die geringere Häufigkeit des letzteren Elements

durch seine größere Elektronenzahl etwa kompensiert wird. Nun kann zur Ausstrahlung der Korona übergegangen werden.

#### 4. Linienspektrum der Korona, Gesamt-emission und Strahlungsintensität in Erdentfernung

Wie schon in Abschn. II erwähnt wurde, ist der kontinuierliche Absorptionskoeffizient bei den hohen Frequenzen so klein, daß eine Absorption des Kontinuums nicht zu berücksichtigen ist. Dies wird im nächsten Abschnitt bei der Untersuchung der Gültigkeit der Ionisationsformel für die Übergänge von diskreten Niveaus ins Kontinuum noch quantitativ begründet werden. Es zeigt sich hingegen, daß eine Schwächung der Linienintensitäten durch Selbstabsorption in Betracht gezogen werden muß.

Die relative Intensitätsverteilung innerhalb einer Linie der Gesamtintensität  $J_0$  ist bei den hohen Temperaturen durch Doppler-Effekt bedingt und gegeben durch<sup>28</sup>

$$J(\omega) d\omega = J_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(\omega/\Delta\omega_D)^2} \frac{d\omega}{\Delta\omega_D}. \quad (61)$$

Dabei ist die Linienbreite abhängig von

$$\Delta\omega_D = \omega \xi_0/c. \quad (62)$$

Hierin bedeutet  $\xi_0$  die mittlere Radialgeschwindigkeit; bei rein thermischer Verbreiterung wird man für Fe-Atome auf eine Geschwindigkeit  $\xi_0 = 1,5 \cdot 10^6$  cm/sec geführt. Wie Konturen von Koronalinien des Eisens und Nickels<sup>29</sup> lehren, entspricht die beobachtete Linienbreite aber einem Wert  $\xi_{oges} = 3 \cdot 10^6$  cm/sec, die durch das Hinzutreten einer Turbulenzbewegung zu deuten ist<sup>1</sup>. Ist die mittlere Turbulenzgeschwindigkeit  $\xi_t$ , so gilt

$$\xi_{oges}^2 = 2kT/Am_H + \xi_t^2. \quad (63)$$

Für  $\xi_t$  ist nach den obigen Angaben der Wert  $2,6 \cdot 10^6$  cm/sec zu wählen. Damit wird

$$\xi_0 = \sqrt{2kT/Am_H} \sqrt{1 + 6,8 \cdot 10^{12} Am_H/2kT}. \quad (64)$$

Bei einer Wellenlänge von etwa 100 Å erhält man für Fe-Ionen eine Breite  $\Delta\lambda_D \approx 10^{-2}$  Å. Sie ist noch um 2 Größenordnungen größer als die natürliche Linienbreite  $\Delta\lambda_N = 1,18 \cdot 10^{-4}$  Å. Für leichtere Atome ist  $\Delta\lambda_D$  infolge der größeren Geschwindigkeit natürlich noch größer. Die Vernachlässigung der natürlichen Linienbreite ist also gerechtfertigt.

<sup>29</sup> B. Lyot u. M. Waldmeier, C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1259 [1936]; Z. Astrophys. **21**, 120 [1942].

Weiter gilt für den Absorptionskoeffizienten je Ion die Formel

$$K = \frac{2\pi^{3/2}e^2}{mc} \frac{f}{\Delta\omega_D} e^{-(\lambda\omega/\lambda\omega_D)^2} = 2\pi^{3/2}cr_0 \frac{f}{\Delta\omega_D} e^{-(\lambda\omega/\lambda\omega_D)^2}. \quad (65)$$

Hierin ist  $f$  die Oszillatorenstärke des betreffenden Übergangs. Zur Abkürzung werde

$$v = \Delta\omega/\Delta\omega_D, \quad K_0 = 2\pi^{3/2}cr_0/\Delta\omega_D \quad (66)$$

gesetzt.  $N$  bedeute die Zahl der absorptionsfähigen Ionen auf einem Sehstrahl. In der Linienmitte ist dann die optische Tiefe  $\tau_0 = NK_0f$ . Die über die Linie integrierte durchgelassene Intensität ist also gegeben durch

$$J = \frac{2J_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\{-v^2 - \tau_0 e^{-v^2}\} dv. \quad (67)$$

Durch Reihenentwicklung findet man

$$J = J_0 \left( 1 - \frac{\tau_0}{1!\sqrt{2}} + \frac{\tau_0^2}{2!\sqrt{3}} - \frac{\tau_0^3}{3!\sqrt{4}} + \dots \right). \quad (68)$$

In Abb. 5a ist der Quotient  $\varphi(\tau_0) = J/J_0$  dargestellt. Die mit wachsendem  $\tau_0$  zunächst sehr rasche Abnahme von  $J$  beruht auf der Absorption in der Linienmitte. Da der Absorptionskoeffizient außerhalb exponentiell abfällt und selbst wieder im Exponenten des Integrals steht, dringt auch bei  $\tau_0 = 1$  noch ein merklicher Bruchteil der Strahlung durch. Nun erfolgt die Hauptemission aus den tiefsten Schichten, da sie proportional zu  $n_e^2$  ist. Für radiale Strahlen, die von der Untergrenze der Korona ausgehen, wird  $N = 3 \cdot 10^{18} n_i/n_e$ . Zum Beispiel ist für Ne VIII bei  $7 \cdot 10^5$  Grad  $n_i/n_e = 2 \cdot 10^{-4}$ , also  $N = 6 \cdot 10^{14}$ . Andererseits ist bei  $\lambda = 100 \text{ \AA}$  für Ne  $K_0 = 4 \cdot 10^{-15}$ , die optische Tiefe in der Linienmitte beträgt also  $2,4f$ . Für die Oszillatorenstärken  $f$  wasserstoffähnlicher Ionen können die Werte für Wasserstoff<sup>26</sup> verwendet werden, denn  $f$  ist proportional zur Frequenz und damit zu  $Z^2$  und zum Absolutquadrat des Matrixelements der Koordinaten und damit proportional zu  $Z^{-2}$ . Sie sind bei mehreren gleichberechtigten Elektronen noch mit deren Zahl zu multiplizieren. Mit  $f = 0,4$  für Ne VIII wird die optische Tiefe in der Linienmitte  $\tau_0 = 1$ . Die Selbstabsorption ist also zu berücksichtigen; auch bei anderen Linien ergeben sich Werte der Größenordnung 1 für  $\tau_0$ .

Es ist nun noch zu beachten, daß die mit dem oben genannten  $N$  berechneten optischen Tiefen nur für radiale Sehstrahlen gelten, im allgemeinen Fall wird  $\tau_0$  noch größer. Bildet der Sehstrahl den Winkel  $\vartheta$  mit

dem Radius, so ergibt sich bei der Integration der Baumbachschen Elektronendichte (3) von einer unteren Integrationsgrenze  $\varrho$  an

$$N(\varrho, \vartheta) = 10^8 \left( \frac{(1,55 J_6}{\varrho^5 \sin^5 \vartheta} + \frac{2,99 J_{16}}{\varrho^{15} \sin^{15} \vartheta} \right) \quad (69)$$

mit

$$J_n = \int_{\varphi_0 = \pi/2 - \vartheta}^{\pi/2} \cos^{n-2} \varphi d\varphi. \quad (70)$$

$J_n$  ist in einfacher Weise durch  $\Gamma$ -Funktionen darzustellen und mit Hilfe der Tabellen von Petri<sup>30</sup> leicht zu berechnen. Bezieht man die Zahl der Elektronen längs eines Sehstrahls  $N(\varrho, \vartheta)$  auf ihren Wert für radiale Strahlen  $N(\varrho, 0)$ , so erhält man für  $n(\varrho, \vartheta) = N(\varrho, \vartheta)/N(\varrho, 0)$  die in Abb. 5b für  $\varrho = \varrho_0 = 1,02$  dargestellte Kurve. Damit ist nun  $\bar{\varphi}(\tau_0(\varrho, \vartheta)) = \varphi(N(\varrho, \vartheta)K_0f)$  über alle Austrittsrichtungen zu mitteln. Das Ergebnis  $\bar{\bar{\varphi}}(\tau_0(\varrho, 0))$  ist auch in Abb. 5a als Funktion der optischen Tiefe der Linienmitte für radiale Sehstrahlen, die von der Untergrenze der Korona ( $\varrho = \varrho_0$ ) ausgehen, zu entnehmen. Tatsächlich stammt natürlich nicht die Gesamtemission aus den tiefsten Koronenschichten,

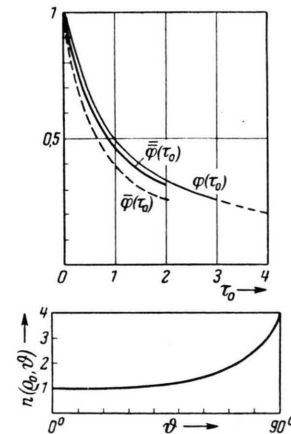


Abb. 5a) Linienabsorption in Abhängigkeit von der optischen Tiefe  $\tau_0$  eines von der Korona-Untergrenze ausgehenden radialen Sehstrahls.

b) Elektronenzahl längs eines von der Korona-Untergrenze ausgehenden Sehstrahls, bezogen auf einen radialen Strahl.

doch liefern diese den wesentlichen Beitrag. Eine genauere Rechnung erfordert noch die Integration über alle  $\varrho$  unter Berücksichtigung der Elektronendichte in verschiedenen Höhen. Dadurch wird die ausgestrahlte Intensität wieder etwas größer und zwar tritt an Stelle von  $\bar{\varphi}(\tau_0(\varrho_0, 0))$  die Funktion  $\bar{\bar{\varphi}}(\tau_0)$ , die ebenfalls in Abb. 6a dargestellt ist. Beide Korrekturen sind ohne Bedeutung, da sie wesentlich kleiner sind als die durch die Dichteschwankungen bedingte Unsicherheit. Aus diesem Grund soll auch von einer Betrachtung der Reemission neben der Absorption abgesehen werden.

Nun kann die Strahlungsenergie in Erdentfernung  $I_L$  durch die Linienemission der Korona im Gebiet weicher Röntgenstrahlen angegeben werden. Faßt man den Unsicherheitsfaktor  $f_3$  mit  $Q$  zusammen, indem man  $f_3 Q = Q'$  setzt, so ergibt sich

<sup>30</sup> W. Petri, Forschungsberichte der Kommission Observatorium Wendelstein, 2, München 1952.

$$I_L = 5,5 \cdot 10^3 Q' (\chi_H/kT)^{1/2} \sum_z \sum_i Y_{zi} \bar{\varphi}(\tau_{0zi}). \quad (71)$$

In den Abb. 6 bis 8 ist  $I_L/Q'$  für  $6 \cdot 10^5$ ,  $7 \cdot 10^5$  sowie  $10^6$  Grad in Abhängigkeit von der Wellenlänge dargestellt. Die beiden ersten Spektren unterscheiden sich nur unwesentlich. Der Hauptbeitrag zur Ausstrahlung liegt nach einem steilen Anstieg auf der kurzwelligen Seite bei etwa 90 bzw. 80–90 Å. Bei

$10^6$  Grad ist die Verschiebung nach kürzeren Wellen merklich; der Schwerpunkt befindet sich bei etwa 60 Å. Die gesamte Strahlungsintensität unterscheidet sich in den betrachteten Fällen nur geringfügig; sie beträgt etwa  $0,06 Q'$  erg/cm<sup>2</sup> sec. Der Beitrag der Hauptgruppe um 80 bis 90 Å bzw. um 60 Å ist etwa  $0,04 Q'$  erg/cm<sup>2</sup> sec. Er ist also ungefähr dreimal größer wie der durch die kontinuierliche Emission unterhalb 900 Å. Doch ist zu beachten, daß die letztere hauptsächlich aus dem langwelligen Teil des Spektrums durch die frei-frei-Übergänge und die H-Rekombinationen stammt. In diesem Bereich wird die Strahlung des Übergangsgebietes Korona-Chromosphäre noch mehr beitragen. Geht man zu kürzeren Wellenlängen über, so tritt zunächst die He-Kante auf und zwar liefern die He-Rekombinationen etwa die gleiche Energie wie die Linienemission des He. Diese ist im Spektrum zum Vergleich bei der Wellenlänge eingetragen, die der Kantenfrequenz entspricht. Hingegen liefern, wie schon hervorgehoben wurde, die Linien der schwereren Elemente um 90 Å mehr Energie als die entsprechenden Kanten. Die in den Grenzkontinua um 50 Å enthaltene Energie ist ebenfalls zum Vergleich eingezeichnet.

Die vorstehenden Angaben beziehen sich entsprechend dem zugrunde gelegten Modell auf die ruhige Korona. Ihre Intensität wird durch die Variation der Elektronendichte im 11-jährigen Zyklus der Sonnenflecken nur eine sehr langsame Änderung etwa um den Faktor 3 erfahren. Diese ruhige Strahlung entspricht der ebenfalls fast konstanten Untergrundstrahlung der Radioastronomie. Es ist zu erwarten, daß zu ihr wie im Radiofrequenzgebiet Störstrahlungen hinzukommen. Dies gilt besonders beim Auftreten von Eruptionen, die durch eine außergewöhnliche Zunahme der Intensität kurzweiliger Strahlung häufig von einem Mögel-Dellinger-Effekt begleitet sind. Auf die ionosphärische Bedeutung der ruhigen Strahlung wird in Abschn. IV hingewiesen.

5. Vergleich der Photoionisationen mit den Stoßionisationen

Bei der Ableitung der Ionisationsformel (1) war vorausgesetzt worden, daß die Ionisation allein durch Stöße und nicht durch Photoprozesse erfolgt. Daß die Photoionisationen durch die Strahlung der Photosphäre keine Rolle spielen, liegt an ihrer tiefen Temperatur und war schon in A quantitativ begründet worden. Hinzu kommen aber noch die Ionisationen durch die Strahlung der Korona selbst. Ihre Zahl konnte früher noch nicht bestimmt werden, da sie die Kennt-

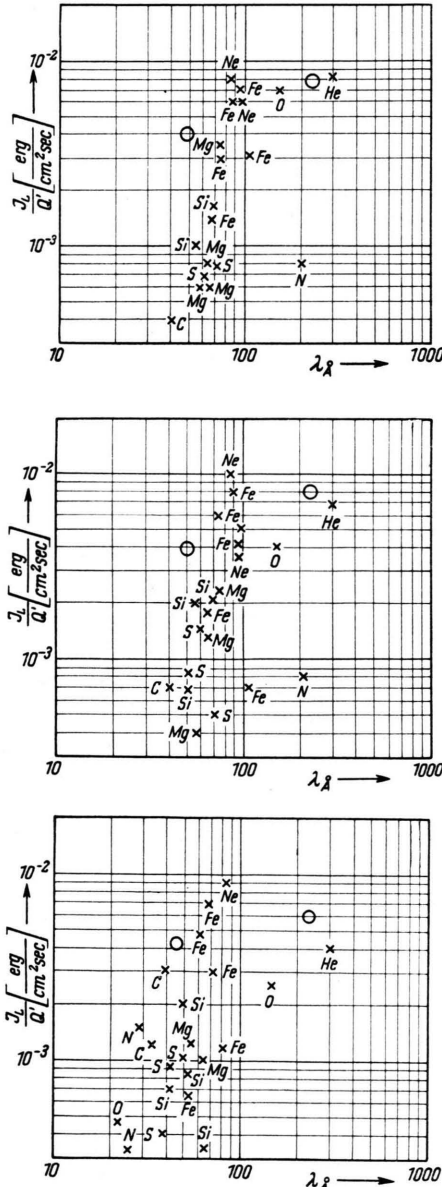


Abb. 6, 7 und 8. Linienspektrum für  $6 \cdot 10^5$ ,  $7 \cdot 10^5$  und  $10^6$  Grad. Strahlungsintensität in Erdentfernung  $I_L$ , dividiert durch  $Q'$ . Die kontinuierliche Strahlungsintensität ist für die 50 Å-Gruppe und He durch Kreise eingezeichnet.

nis der Strahlungsintensität der Korona voraussetzt. Es ist zwar leicht zu sehen, daß die Koronastrahlung äußerlich schwach absorbiert wird. Auf Grund des Absorptionskoeffizienten Gl. (3) in A

$$a_n = \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{\Phi_0}{\alpha^3} \frac{n_0}{Z_{\text{eff}}^2} \left( \frac{\chi_{n_0}}{h\nu} \right)^3 = 8 \cdot 10^{-18} \frac{n_0}{Z_{\text{eff}}^2} \left( \frac{\chi_{n_0}}{h\nu} \right)^3$$

erhält man mit der über einen Sehstrahl integrierten Elektronendichte von der Größenordnung  $10^{18}$ , einer Häufigkeit der absorbierenden Ionen  $n_i/n_e \approx 10^{-3}$  bis  $10^{-5}$ , sowie  $Z_{\text{eff}}^2 \approx 200$  und  $n=1$  bis 3 an der Ionisationsgrenze eine Schwächung der Intensität um etwa  $10^{-4}$  bis  $10^{-6}$ . Die Absorption der kontinuierlichen Strahlung ist also vernachlässigbar. Trotzdem kann hieraus noch nicht ohne weiteres geschlossen werden, daß die Photoionisationen im Ionisationsgleichgewicht keine Rolle spielen, da die Zahl der Stoßionisationen ebenfalls klein ist. Zu einer Untersuchung dieser Frage muß die Zahl beider Prozesse verglichen werden. Bei diesem Vergleich kann auf eine Formel in einer früheren Arbeit des Verfassers<sup>31</sup> zurückgegriffen werden, in der eine allgemeine Ionisationsformel abgeleitet wurde, die außer der Gl. (1) auch die Saha-Gleichung und die Ionisationsgleichung der Gasnebel enthält.

Nach Gl. (15) dieser Arbeit<sup>31</sup> ist das Verhältnis der Zahl der Photoionisationen zur Zahl der Stoßionisationen bis auf unwesentliche Faktoren gegeben durch

$$\frac{Z_J \text{ Photo}}{Z_J \text{ Stoß}} = \frac{Q_{12}}{n_e S_{12}} = \frac{1}{4\pi (3\pi)^{3/2}} \frac{\alpha^3 c^2}{a_0^2} \frac{1}{n_0 n} \left( \frac{\chi_{n_0}}{kT} \right)^{1/2} \left( \frac{\chi_{n_0}}{\chi_{II}} \right)^{7/2} e^{\chi_{n_0}/kT} \int_{\nu_n}^{\infty} \frac{\bar{I}_\nu}{h\nu} \frac{d\nu}{\nu^3}. \quad (72)$$

Darin bedeutet  $\bar{I}_\nu$  die aus allen Richtungen zugestrahlte Intensität. Ist  $J_\nu$  die gesamte Energieemission je  $\text{cm}^3$  und sec,  $H$  die Höhe über der Sonnenoberfläche und  $R$  der Abstand des Aufpunktes P vom Sonnenmittelpunkt 0, so ist mit  $h=H/R$ ,

$$\bar{I}_\nu = \frac{R_\odot}{2} \int \int \frac{J_\nu d h \sin \vartheta d \vartheta}{\sqrt{1 - (\sin^2 \vartheta)/(1+h)^2}}. \quad (73)$$

Hierin ist  $\vartheta$  der Winkel zwischen der Strahlrichtung und der Richtung OP. Im vorliegenden Fall genügt nun eine Abschätzung des Integrals. Da die Zustrahlung proportional zum Quadrat der Elektronendichte ist und diese nach der Baumbach-Formel mit wachsendem  $q$  sehr stark abfällt, stammen die Hauptbeiträge zum Integral aus geringen Höhen. Deshalb erhält man ausreichende Genauigkeit, wenn man im Nenner von (73) nach  $h$  entwickelt. Bei der Integration über  $\vartheta$  findet man dann  $1/2 \ln 2/h$ . Damit wird

$$\frac{R_\odot}{4} \int_0^\infty n_e^2 \ln \frac{2}{h} dh \approx 6 \cdot 10^{15} R_\odot.$$

Andererseits ergibt sich für das über die gesamte Korona integrierte Quadrat der Elektronendichte nach (4) ein Wert, der fast genau um die Oberfläche der

Sonne größer ist. Man ist deshalb berechtigt, für die Intensität  $\bar{I}_\nu$  an der Untergrenze der Korona die gesamte Emission je  $\text{cm}^2$  Sonnenoberfläche zu setzen, was auch etwa zu erwarten war.

Diese ist aber aus den Formeln (23) und (71) zu entnehmen, wenn man  $I_{fg}$  und  $I_L$  durch den Verdünnungsfaktor, das Quadrat des Verhältnisses von Sonnenradius und Erdentfernung dividiert.

Das Integral (72) kann nun abgeschätzt werden, indem man  $\nu$  durch seinen Maximalwert, die Kantenfrequenz  $\nu_{n_0}$ , ersetzt. Kürzt man noch mit  $\nu_{n_0}^4$  und setzt Zahlwerte ein, so wird für  $7 \cdot 10^5$  Grad

$$V = \frac{Z_J \text{ Photo}}{Z_J \text{ Stoß}} < \frac{5}{n_e n_0} e^{\chi_{n_0}/kT} \int_{\nu_{n_0}}^{\infty} \bar{I}_\nu d\nu. \quad (74)$$

Diese Ungleichung soll zunächst für die Ionisationsenergien der Fe-Reihe diskutiert werden. Sie liegen zwischen 249 und 380 eV. Dem ersteren Wert entspricht eine maximale für die Ionisation in Betracht kommende Wellenlänge von 50 Å. Nach Tab. 2 und 5 erhält man für kleinere Wellenlängen bei  $7 \cdot 10^5$  Grad  $\Sigma y_{zi} w \approx 2$ ,  $\Sigma Y_{zi} \approx 10^{-6}$ . Verwendet man andererseits in der Exponentialfunktion den Maximalwert von  $\chi_{n_0}$ , so ergibt sich

$$V < 2 \cdot 10^6 Q'/n_e n_0. \quad (75)$$

Die Abschätzung zeigt also zunächst, daß die Photoionisationen für Ionisationsenergien des Bereichs der Fe-Reihe gegenüber den Stoßionisationen zu vernachlässigen sind, jedenfalls in der für die Ausstrahlung interessierenden inneren Korona. Natürlich könnte die Abschätzung noch verschärft werden.

Ähnliche Resultate ergeben sich auch in anderen Wellenlängengebieten. Betrachtet man etwa den Bereich zwischen 300 und 50 Å, der bis zu Ionisationsenergien von 40 eV herunterreicht, so ergibt sich mit den genannten Tabellen und dem Maximalwert von  $\chi_{n_0}$  in diesem Wellenlängenbereich eine Abschätzung, die sich von der obigen praktisch nicht unterscheidet. Damit ist die Berechtigung der Ionisationsformel (1) in dem gesamten in der vorliegenden Arbeit interessierenden Bereich der Ionisationsenergien nachgewiesen.

#### IV. Zur Bildung der normalen ionosphärischen E-Schicht

Es ist heute als gesichert anzusehen, daß die normale ionosphärische E-Schicht von einer solaren Wellenstrahlung herrührt. Von ihr sind folgende Eigenschaften zu fordern: sie muß einmal die nötige Energie zur Bildung der Ionen liefern, zum andern muß die Strahlung in der richtigen Höhe von etwa 120 km wirksam werden; schließlich soll sie die Variation der Elektronendichte im 11-jährigen Zyklus der Sonnenflecken erklären.

Die ionisierende Strahlung wird in der Erdatmosphäre in der Höhe maximal absorbiert, in der ihre Intensität auf den  $e$ -ten Teil ihres extraterrestrischen

<sup>31</sup> G. Elwert, Z. Naturforschg. 7a, 703 [1952].



schen Wertes abgesunken ist, in der also das Produkt aus Absorptionskoeffizient  $\kappa$  und durchsetzter Luftmasse  $D$  gleich 1 ist. In der Abb. 9 ist der experimentelle Absorptionskoeffizient für Luft nach Schneider<sup>32</sup> und Siedentopf<sup>33</sup> in Abhängigkeit von der Wellenlänge auf der linken Seite wiedergegeben. Er ist bezogen auf Luft unter Normalbedingungen von 1 cm Schichtdicke und einen Einfallswinkel von 45°. Wie aus der Größe der Ionisationsenergien von Stickstoff und Sauerstoff zu schließen ist, kommen als Ionisationsursache nur

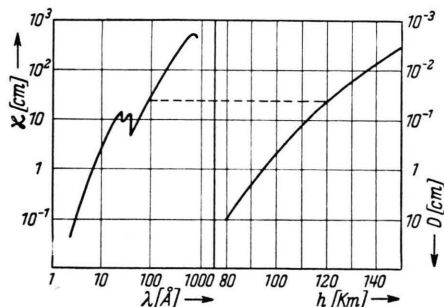


Abb. 9. Absorptionskoeffizient  $\kappa$ , bezogen auf 1 cm Luft unter Normalbedingungen und effektive Schichtdicke  $D$  der Atmosphäre. — Aus der Abb. ist der Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Höhe maximaler Absorption zu ersehen.

Wellenlängen unterhalb von etwa 1000 Å in Betracht. Bei Aufstiegen von V<sub>2</sub>-Raketen konnte andererseits von Havens, Koll und La Gow<sup>34</sup> der Luftdruck bis in eine Höhe von 160 km gemessen werden. Rechnet man ihn auf die Dicke einer Luftsäule unter Normalbedingungen  $D$  um, so erhält man die auf der rechten Seite der Abb. gezeichnete

Kurve. Beide Kurven sind in demselben logarithmischen Maß aufgetragen, und zwar die linke nach oben positiv, die rechte nach unten positiv, so daß für jede Ordinate das Produkt aus Absorptionskoeffizient  $\kappa$  und Dicke der äquivalenten Luftschicht  $D$  gleich 1 ist. Dies ist aber die Bedingung maximaler Absorption. Geht man also von einer bestimmten Wellenlänge aus, so kann man zunächst links den Absorptionskoeffizienten und rechts die Schichtdicke ablesen, die die Strahlung durchsetzen muß, bis maximale Absorption eintritt. Die dazugehörige Höhe der Atmosphäre kann auf der rechten Abszisse entnommen werden. Man sieht sofort, daß Strahlung im Wellenlängenbereich zwischen 60 und 90 Å in einer Höhe von 110 bis 120 km maximal absorbiert wird. Sie wird also etwa in der Höhe der E-Schicht Ionen bilden. Beste Übereinstimmung mit den ionosphärischen Beobachtungen erzielt man mit der Intensitätsverteilung der Abb. 7 für eine Koronatemperatur von  $7 \cdot 10^5$  Grad, also der Temperatur, bei der die rote und grüne Koronalinie nach A etwa gleiche Intensität haben. Dies gilt nicht nur für die aus den Beobachtungen folgende Schichthöhe, sondern auch ihre Dicke; auch für die Absolutwerte der im Gleichgewicht zwischen Ionisation und Rekombination vorhandenen Elektrendichte und ihre Variation im 11-jährigen Zyklus der Sonnenflecken erhält man befriedigende Übereinstimmung. Hierüber wird in einer anderen Arbeit des Verfassers<sup>35</sup> berichtet.

Herrn Prof. Siedentopf möchte ich für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und für Diskussionen herzlich danken.

<sup>32</sup> E. G. Schneider, J. Opt. Soc. Amer. **30**, 128 [1940].

<sup>33</sup> H. Siedentopf, Grundriß der Astrophysik, Wissenschaftl. Verlagsges. Stuttgart, 1950. Naturwiss. **35**, 289 [1948].

<sup>34</sup> R. J. Ravens, R. T. Koll u. H. E. La Gow, J. Geophys. Res. **57**, 59 [1952].

<sup>35</sup> G. Elwert, Journ. Atm. Terr. Phys. **4**, 68 [1953].